NGÔ LONG HẬU - NGUYỄN QUANG HANH

ĐỂ HỌC TỐT TOÁN 7

TẬP 2



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGÔ LONG HẬU – NGUYỄN QUANG HANH – V.CẬN

Để học tốt

TOÁN

THCS

7

Tập 2

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương III

THỐNG KÊ

§1. THU THẬP SỐ LIỆU THỐNG KÊ, TẦN SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Thu thập số liệu, bảng số liệu thống kê ban đầu

Việc làm của người điều tra là thu thập số liệu về vấn đề, hiện tượng được quan tâm tìm hiểu. Các số liệu đó được ghi vào một bảng, gọi là bảng *số liệu thống kê ban đầu*.

2. Dấu hiệu

• Vấn đề hay hiện tượng được người điều tra quan tâm tìm hiểu gọi là dấu hiệu thường được kí hiệu là X, Y,... (chữ in hoa).

Khi người điều tra quan tâm về sự phát triển dân số của các thôn trong một xã thì mỗi thôn là một đơn vị điều tra.

• Ứng với mỗi đơn vị điều tra có một số liệu thì số liệu đó gọi là *một giá trị của dấu hiệu*.

Số các giá trị (không nhất thiết khác nhau) của dấu hiệu đúng bằng số các đơn vị điều tra (thường được kí hiệu là N).

3. Tần số của mỗi giá trị

Mỗi giá trị có thể xuất hiện nhiều lần trong dãy giá trị của dấu hiệu. *Số lần xuất hiện của một giá trị trong dãy giá trị của dấu hiệu được gọi là tần số của giá trị đó.*

Giá trị của dấu hiệu kí hiệu là x, tần số của giá trị kí hiệu là n.

Tất nhiên cần phân biệt X và x, N và n.

Ví dụ 1. Giá thành của một sản phẩm (tính theo 1000đ) của 20 cơ sở sản xuất sản phẩm đó được cho như sau:

15	25	30	25	20	25	30	25	30	15
20	35	20	35	30	15	25	25	20	25

Bảng 1

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu là gì

b) Số các giá trị của dấu hiệu và số các giá trị khác nhau của dấu hiệu;

c) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của chúng.

Giải:

a) Dấu hiệu là giá thành của một sản phẩm nào đó mà người điều tra cần tìm hiểu;

b) Số các giá trị của dấu hiệu là 20 và số các giá trị khác nhau là 5;

c) Các giá trị khác nhau là 15, 20, 25, 30, 35 và tần số tương ứng là: 3, 4, 7, 4, 2.

Ví dụ 2:

Theo dõi 20 chuyến xe khách chạy từ Hà Nội đến Nam Định ta có thời gian chạy của xe (đơn vị phát) được ghi trong bảng số liệu thống kê sau:

115	110	90	115	110	120	90	115	95	120
110	125	95	90	95	100	110	120	100	110

Bảng 2

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu là gì? số các giá trị của dấu hiệu đó bằng bao nhiêu?

b) Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu;

c) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của chúng.

Giải:

a) Dấu hiệu là thời gian chạy của mỗi chuyến xe khách từ Hà Nội đến Nam Định. Số các giá trị của dấu hiệu là 20;

b) Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu là: 7;

c) Các giá trị khác nhau:	90	95	100	110	115	120	125
Tần số tương ứng:	3	3	2	5	3	3	1

II. BÀI TẬP

1. Đo chiều cao cho 50 học sinh của trường PTCS Thái Sơn ta có bảng sau (đơn vị: cm)

Nam					Nữ				
160	160	165	154	167	159	157	155	151	153
163	165	160	142	161	155	159	153	149	147
154	167	163	160	168	153	147	159	145	143
161	176	152	154	163	149	147	153	159	157
150	168	161	154	165	157	155	151	155	159

Bảng 3 ***Bảng 4***

Hãy cho biết:

a) Dấu hiệu chung cần tìm hiểu (ở cả hai bảng).

b) Các giá trị của dấu hiệu và số các giá trị khác nhau của dấu hiệu (đối với từng bảng).

c) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của chúng (đối với từng bảng).

2. Cân 50 quả xoài hái từ một cây ta có bảng sau (đơn vị gam):

120	125	130	135	140	145	150	155	160	165
125	140	145	155	160	165	145	140	130	135
135	140	150	165	170	145	155	145	125	140
145	150	160	170	140	170	150	140	135	145
145	155	160	150	165	125	150	145	140	130

Bảng 5

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu là gì?

b) Số các giá trị của dấu hiệu và số các giá trị khác nhau của dấu hiệu;

c) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tần số của chúng.

3. Sáng nào bà Ân cũng đi bộ 3 km. Bà Ân ghi lại thời gian cần thiết để đi hết quãng đường đó trong 10 ngày như sau:

Số thứ tự ngày	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Thời gian (phút)	60	61	60	65	60	61	65	62	62	64

Hỏi: a) Dấu hiệu mà bà Ân quan tâm là gì? và dấu hiệu đó có tất cả bao nhiêu giá trị?

b) Có bao nhiêu giá trị khác nhau?

c) Viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tìm tần số của chúng.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) Dấu hiệu cần tìm hiểu (ở cả hai bảng) là chiều cao của HS trường PTCS xã Thái Sơn.

b) Đối với bảng Nam số giá trị của dấu hiệu: 25

bảng Nữ: 25

Đối với bảng Nam số giá trị khác nhau của dấu hiệu: 11, đối với bảng Nữ: 9

c) • Đối với bảng Nam: 142 150 152 154 160 161 163 165 167 168 176

Tần số tương ứng: 1, 1, 1, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 1

• Đối với bảng nữ: 143 145 147 149 151 153 155 157 159

Tần số tương ứng 1 1 3 2 2 4 4 3 5

2. a) Dấu hiệu cần tìm hiểu là khối lượng quả xoài từ một cây xoài;

b) Số các giá trị của dấu hiệu: 50, số các giá trị khác nhau: 11;

c) Các giá trị khác nhau:

120 125 130 135 140 145 150 155 160 165 170

Tần số tương ứng:

1 4 3 4 8 9 6 5 4 4 2

3. a) Dấu hiệu bà Ân quam tân là thời gian đi bộ, có 10 giá trị;

b) Có 5 giá trị khác nhau;

c)

Giá trị (X)	60	61	62	64	65	
Tần số (n)	3	2	2	1	2	N = 10

§2. BẢNG "TẦN SỐ" CÁC GIÁ TRỊ CỦA DẤU HIỆU

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Lập bảng tần số

Vẽ một khung hình chữ nhật gồm 2 dòng: Ở dòng đầu ghi lại các giá trị khác nhau của dấu hiệu theo thứ tự tăng dần, dòng thứ hai ghi các tần số tương ứng với các giá trị đó. Bảng này gọi là *bảng phân phối thực nghiệm của dấu hiệu* gọi tắt là bảng *"tần số"*.

Từ bảng số liệu thống kê ban đầu của ví dụ 1, §1. Ta có bảng "tần số" sau:

Giá trị (x)	15	20	25	30	35
Tần số (n)	3	4	7	4	2

Bảng 6

2. Chú ý

- Có thể chuyển bảng "tần số" dạng ngang sang dạng dọc (chuyển dòng thành cột)

Giá trị (x)	Tần số (n)
15	3
20	4
25	7
30	4
35	2

Bảng 7

- *Bảng 6* hoặc *bảng 7* giúp chúng ta quan sát và nhận xét về giá trị của dấu hiệu dễ dàng hơn so với *bảng 1*. Như vậy bảng "tần số" giúp người điều tra dễ có những nhận xét chung về phân phối giá trị của dấu hiệu và tiện lợi trong việc tính toán sau này.

Ví dụ 1: Cân kiểm tra sức khoẻ của 30 học sinh lớp 7A trường C ta được bảng số liệu thống kê sau. (đơn vị kg):

40	43	38	42	39	35	47	37	39	47
38	40	37	39	43	39	32	30	36	48
37	44	38	33	37	37	48	39	38	30

Bảng 8

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì?

b) Lập bảng "tần số" và rút ra nhận xét (số các giá trị của dấu hiệu, số các giá trị khác nhau, giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất, giá trị có tần số lớn nhất, các giá trị thuộc khoảng nào là chủ yếu).

Giải

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là cân nặng của học sinh lớp 7A.

b) Từ bảng số liệu thống kê ban đầu, ta lập được bảng "tần số"

Giá trị (x)	30	32	33	35	36	37	38	39	40	42	43	44	47	48
Tần số (n)	1	1	1	1	1	4	6	5	2	1	2	1	2	2

Bảng 8

- Các giá trị của dấu hiệu: 30
- Số các giá trị khác nhau: 14
- Giá trị nhỏ nhất: 30 kg

• Giá trị lớn nhất: 48 kg

• Giá trị có tần số lớn nhất: 38 kg (tần số lớn nhất là 6)

• Các giá trị từ 37 kg đến 39 kg là chủ yếu.

Ví dụ 2. a) Từ *bảng 3* đo chiều cao của 25 học sinh nam của trường PTCS Thái Sơn hãy lập bảng "tần số";

b) Từ bảng "tần số" rút ra nhận xét về số các giá trị của dấu hiệu, số các giá trị khác nhau, giá trị nào có tần số lớn nhất;

c) Số bạn nam có chiều cao 160 cm chiếm bao nhiêu phần trăm trong số các bạn nam được đo chiều cao?

Giải

a)

Giá trị (x)	142	150	152	154	160	161	163	165	167	168	176
Tần số (n)	1	1	1	4	4	3	3	3	2	2	1

Bảng 9

b) • Số các giá trị của dấu hiệu: 25

• Số các giá trị khác nhau: 11

• Giá trị có tần số lớn nhất: 154, 160 hai giá trị này cũng có tần số lớn nhất là 4.

c) Số các bạn Nam có chiều cao 160 cm chiếm $\frac{4}{25} = 16\%$ số học sinh nam được đo chiều cao.

II. BÀI TẬP

1. Cho mỗi học sinh lớp 7B ném bóng vào rổ trong 4 phút ta được số lần bóng ném trúng rổ lần lượt là:

4	6	8	10	12	14	16	18	10	8
8	10	12	14	4	8	10	8	12	16
12	14	16	8	10	14	16	16	8	4
10	8	18	12	8	16	14	12	10	8

Bảng 10

a) Từ bảng thống kê ban đầu, lập bảng tần số;

b) Cho biết giá trị có tần số lớn nhất;

c) Số học sinh ném trúng vào rổ 10 quả chiếm bao nhiêu phần trăm

2. Một lần kiểm tra toán gồm 45 học sinh lớp 7A, thống kê điểm số như sau:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	8	1	3	5	5	8	1	10
8	3	2	4	3	5	5	8	9
5	5	8	5	4	5	5	5	3
7	8	2	3	5	8	8	6	4

Bảng 11

a) Dấu hiệu điều tra là gì?

b) Hãy viết các giá trị khác nhau trong bảng số liệu thống kê ban đầu trên;

c) Hãy lập bảng tần số;

d) Tính tỉ lệ phần trăm số học sinh đạt điểm thấp nhất và điểm cao nhất;

e) Giá trị nào có tần số lớn nhất.

3. Thời gian bác công nhân Hoà hoàn thành một sản phẩm (tính theo phút) trong ngày 1/9 được ghi lại như sau:

28	30	29	28	30	29	30	32
30	29	31	30	31	30	31	32

a) Dấu hiệu ở đây là gì? Số các giá trị là bao nhiêu?

b) Lập bảng tần số.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) Ta có bảng "tần số"

Giá trị (x)	4	6	8	10	12	14	16	18
Tần số (n)	3	1	10	7	6	5	6	2

Bảng 12

b) Giá trị có tần số lớn nhất là 8 (tần số 10)

c) Tỉ lệ số học sinh ném trúng rổ 10 quả là $\frac{7}{40} = 17,5\%$

2. a) Dấu hiệu điều tra là điểm kiểm tra Toán của lớp 7A;

b) Có 10 giá trị khác nhau trong bảng số liệu thống kê ban đầu: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;

c) Ta có bảng tần số:

Giá trị (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tần số (n)	3	3	6	4	12	2	2	9	2	2

Bảng 13

d) Điểm thấp nhất là 1, có 3 học sinh đạt điểm 1 so với 45 học sinh lớp 7A chiếm tỉ lệ $\frac{3}{45} \approx 6\%$;

Điểm cao nhất là 10, có 2 học sinh đạt điểm 10 so với 45 học sinh lớp 7A chiếm tỉ lệ $\frac{2}{45} \approx 4\%$;

e) Giá trị 5 có tần số cao nhất là 12. (số người đạt điểm 5 là 12 người).

3. a) Dấu hiệu là thời gian (tính bằng phút) hoàn thành một sản phẩm. Có 16 giá trị.

b) Bảng tần số:

Giá trị (x)	28	29	30	31	32	
Tần số (n)	2	3	6	3	2	N = 16

Bảng 14

§3. BIỂU ĐỒ

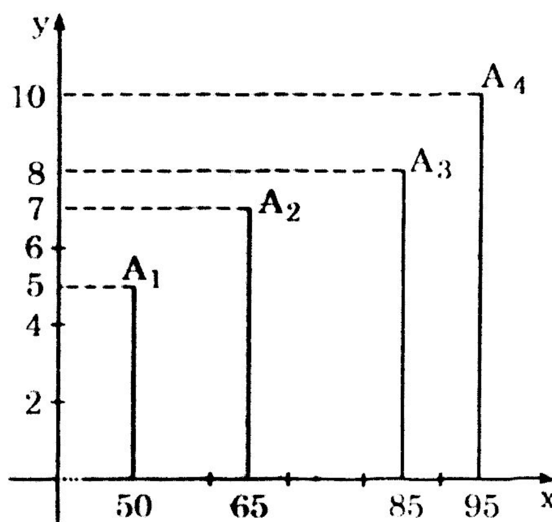
I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Biểu đồ đoạn thẳng

Dựng biểu đồ đoạn thẳng theo các bước:

• Dựng hệ trục toạ độ, trục hoành biểu diễn các giá trị x, trục tung biểu diễn tần số n (độ dài đơn vị trên hai trục có thể khác nhau).

• Xác định các điểm gồm cặp số giá trị và tần số của nó (x_i, n_i), chú ý phải viết giá trị trước, tần số viết sau.



Hình 1

• Các đoạn thẳng nối mỗi điểm đó với điểm nằm trên trục hoành có cùng hoành độ gọi là biểu đồ đoạn thẳng.

2. Biểu đồ hình chữ nhật

Thay các đoạn thẳng trong biểu đồ đoạn thẳng bằng các hình chữ nhật (có cùng chiều rộng) ta được biểu đồ hình chữ nhật. Cũng có khi các hình chữ nhật vẽ sát nhau để dễ so sánh.

3. Biểu đồ hình quạt.

Đó là một hình tròn được chia thành các hình quạt mà góc ở tâm tỉ lệ với tần suất $\left(f = \frac{n}{N}\right.$. f là tần suất N là số các giá trị, n là tần số của mỗi giá trị. Người ta thường biểu diễn f dưới dạng tỉ số phần trăm).

Ví dụ 1. Điểm kiểm tra thi Anh văn của 30 học sinh trường PTCS Thái Sơn như sau (thang điểm 100):

Giá trị (x) (điểm số)	50	65	85	95
Tần số (n)	5	7	8	10
Tần suất (f)	17%	23%	26%	34%

Bảng 14

Hãy lập biểu đồ đoạn thẳng, hình chữ nhật, biểu đồ hình quạt của dấu hiệu trên.

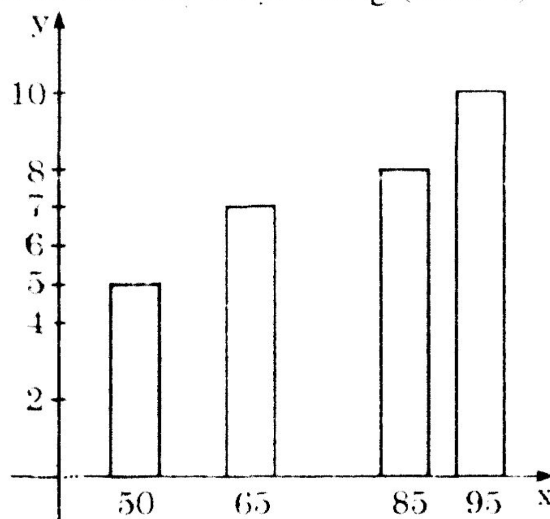
Giải:

Trên hệ trục toạ độ trục hoành biểu diễn giá trị x, trục tung biểu diễn tần số n.

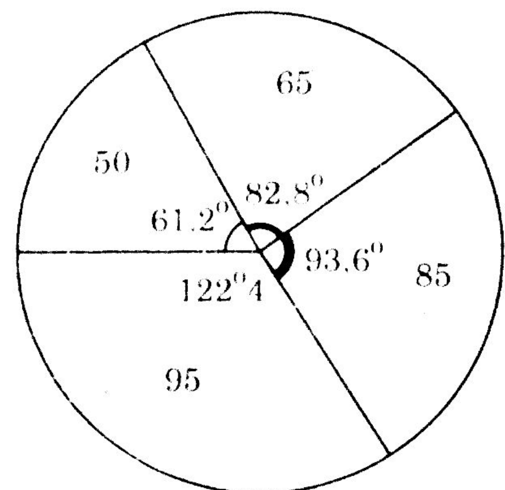
Ta xác định được các điểm $A_1(50; 5)$, $A_2(65; 7)$, $A_3(85; 8)$, $A_4(95; 10)$

Biểu diễn các điểm A_1, A_2, A_3, A_4 trên mặt phẳng toạ độ.

Ta có biểu đồ đoạn thẳng (hình 1)



a) Biểu đồ hình chữ nhật



b) Biểu đồ hình quạt

Hình 2

Ví dụ 2. Nghiên cứu về bệnh hen, người ta ghi lại tuổi của 40 bệnh nhân này theo bảng số liệu sau:

Nhóm	Khoảng tuổi	Số người
1	11 – 20	7
2	21 – 30	9
3	31 – 40	7
4	41 – 50	14
5	51 – 60	3

a) Lập bảng tần số và tần suất của dấu hiệu trên;

b) Vẽ biểu đồ đoạn thẳng, hình chữ nhật và biểu đồ tần suất hình quạt của dấu hiệu trên.

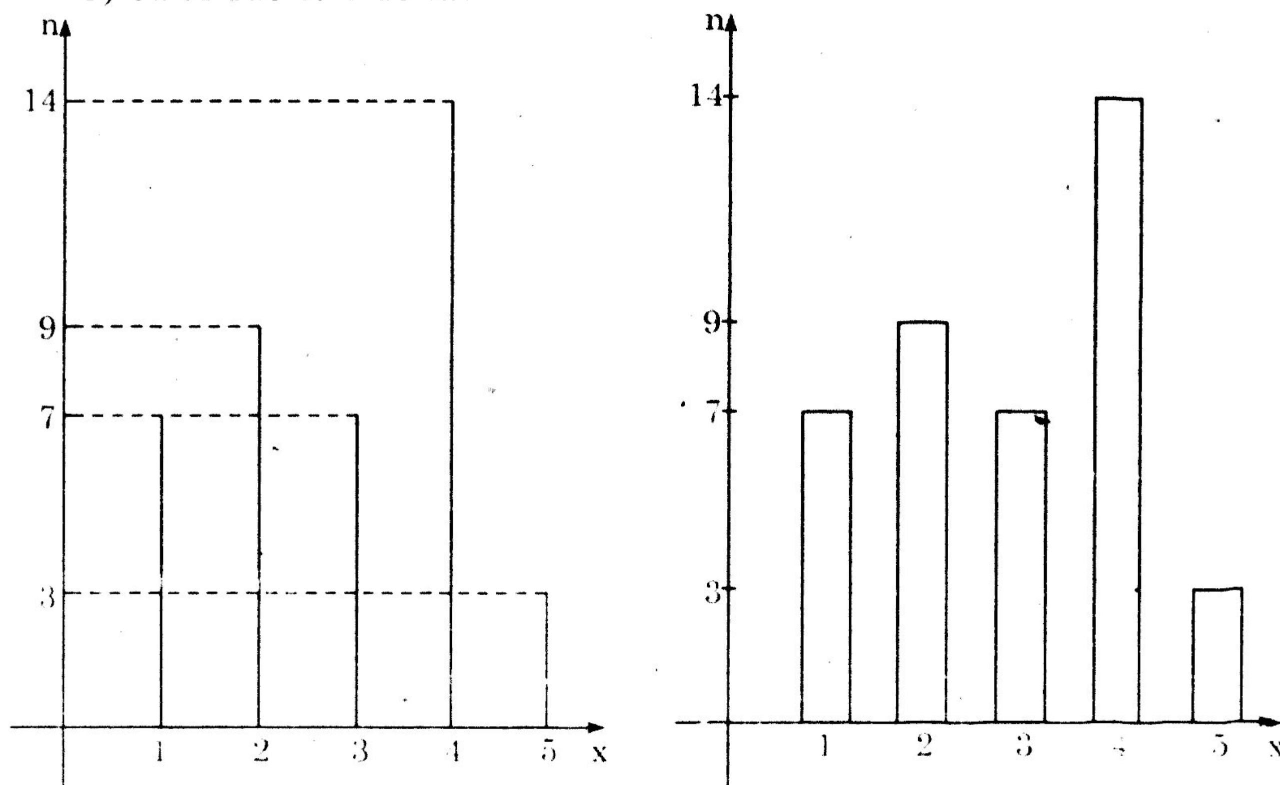
Giải

a) Ta có bảng tần số và tần suất sau:

Giá trị (x) (Nhóm)	1	2	3	4	5
Tần số (n)	7	9	7	14	3
Tần suất (f) %	17,5	22	17,5	35	8

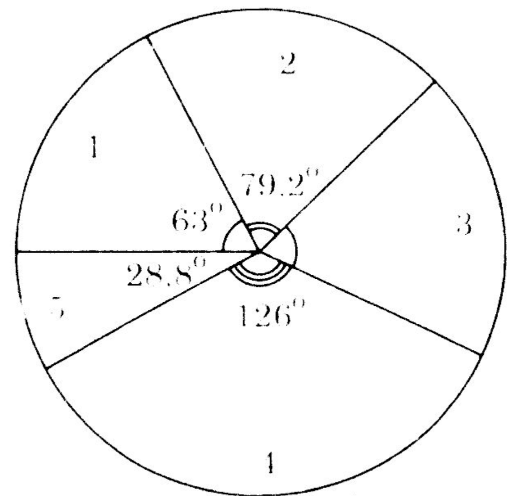
Bảng 15

b) Ta có các biểu đồ sau:



Hình 3

Biểu đồ hình quạt (hình 4)



Hình 4

II. BÀI TẬP

1. Điểm tổng kết Toán học kì I của lớp 7A cho ở bảng:

Giá trị (x) (Điểm số)	Điểm dưới 5	Điểm 5 và 6	Điểm 7 và 8	Điểm 9 và 10
Tần số (n)	10	20	14	6

Bảng 16

a Lập lại *(bảng 16)* với dòng tần suất của các giá trị *(bảng 17)*.

b Biểu diễn dấu hiệu và tần số bằng biểu đồ hình chữ nhật.

c Biểu diễn tần suất bằng biểu đồ hình quạt.

2. a Từ bảng 7 thêm một cột tần suất các giá trị *(bảng 18)*.

b Từ bảng 18 biểu diễn dấu hiệu và tần số bằng biểu đồ đoạn thẳng.

c Từ bảng 18 biểu diễn tần suất bằng biểu đồ hình quạt.

3. Điều tra số học sinh mỗi lớp của một trường THCS, ta có bảng sau:

Lớp	Số học sinh	Lớp	Số học sinh	Lớp	Số học sinh	Lớp	Số học sinh
6A	40	7A	41	8A	39	9A	38
6B	41	7B	42	8B	40	9B	40
6C	42	7C	42	8C	42	9C	38
6D	40	7D	40	8D	40	9D	39

a Từ bảng trên, lập bảng tần số các giá trị của dấu hiệu;

b Theo bảng tần số, vẽ biểu đồ đoạn thẳng;

c Tính tần suất của các giá trị của dấu hiệu;

d Căn cứ vào bảng tần suất, vẽ biểu đồ hình quạt.

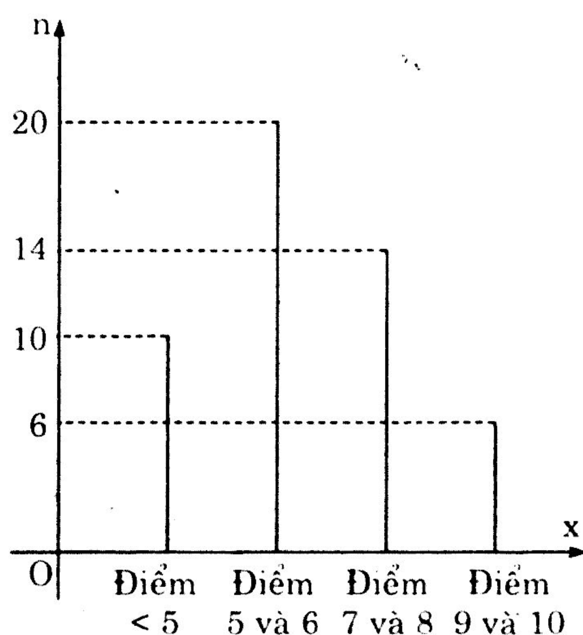
III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) Ta đã biết tần suất $f = \frac{n}{N}$. Vậy ta có:

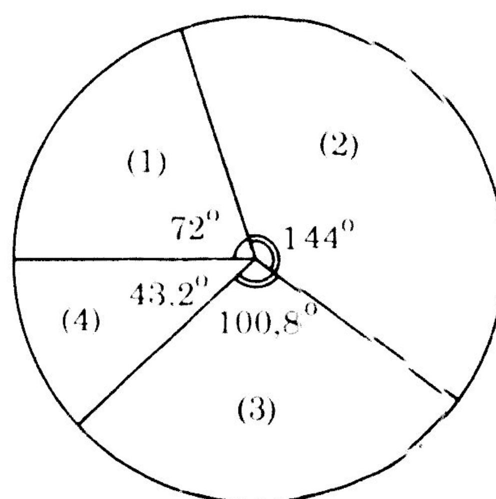
Giá trị (x) (Điểm số)	Điểm dưới 5	Điểm 5 và 6	Điểm 7 và 8	Điểm 9 và 10
Tần số (n)	10	20	14	6
Tần suất (f)	20%	40%	28%	12%

Bảng 17

b)



a)



(1) Điểm dưới 5
(2) Điểm 5 và 6
(3) Điểm 7 và 8
(4) Điểm 9 và 10

b)

Hình 5

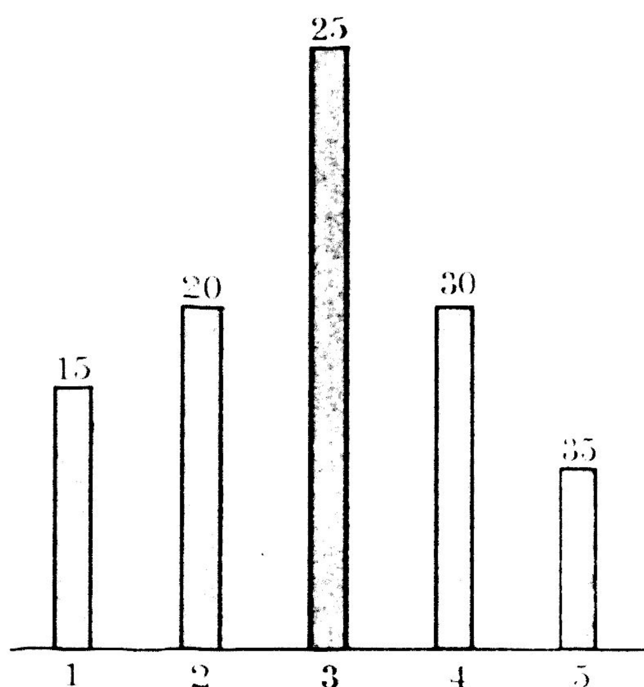
2.

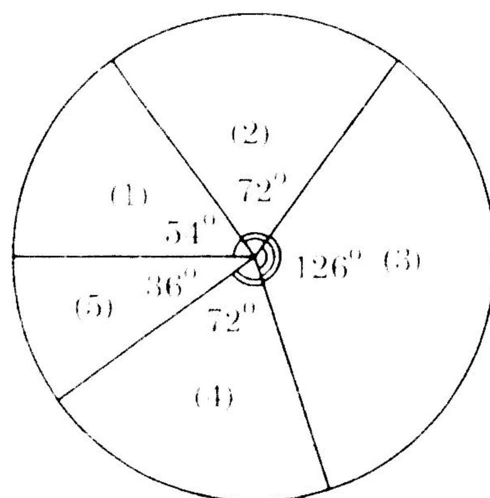
Giá trị (x)	Tần số (n)
15	3
20	4
25	4
30	7
35	2

Viết lại bảng 7

Giá trị (x)	Tần số (n)	Tần suất (f)
15	3	15%
20	4	20%
25	7	35%
30	4	20%
35	2	10%

bảng 18





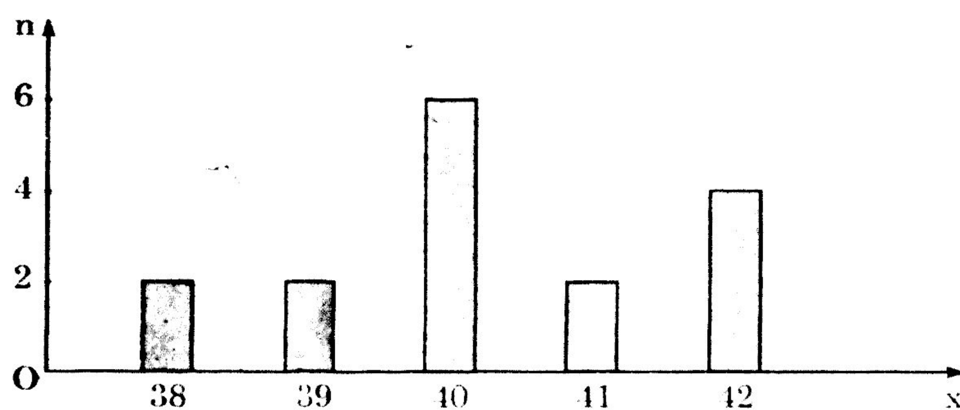
a) Đơn vị của các cột là 1000đ *b) Biểu đồ hình quạt*

Hình 6

3. a) Bảng tần số:

Giá trị (x)	38	39	40	41	42	
Tần số (n)	2	2	6	2	4	N = 16

b) Biểu đồ:



Hình 7

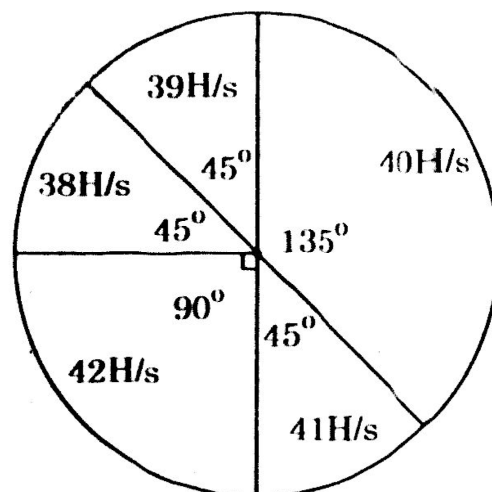
c) Bảng tần suất:

Giá trị (x)	38	9	40	41	42	
Tần số (n)	2	2	6	2	4	N = 16
Tần suất (f)	$\frac{2}{16}$ (12,5%)	$\frac{2}{16}$ (12,5%)	$\frac{6}{16}$ (37,5%)	$\frac{2}{16}$ (12,5%)	$\frac{4}{16}$ (25%)	

d) Biểu đồ hình quạt:

– Số đo góc ở tâm của các hình quạt tỉ lệ với tần suất.

– Số đo góc ở tâm của các hình quạt lần lượt là: 45^o; 45^o; 135^o; 45^o; 90^o



Hình 8

§4. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Công thức tính số trung bình cộng

$$\overline{X} = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + ... + x_kn_k}{N}$$

Trong đó $x_1, x_2, ..., x_k$ là k giá trị khác nhau của dấu hiệu

$n_1, n_2, ..., n_k$ là k tần số tương ứng

N là số các giá trị ($N = n_1 + ... + n_k$)

$\overline{X}$ là số trung bình cộng

2. Ý nghĩa của số trung bình cộng

Số trung bình cộng thường được dùng làm "đại diện" cho dấu hiệu đặc biệt là khi muốn so sánh các dấu hiệu cùng loại.

Chú ý. Khi các giá trị của dấu hiệu có sự chênh lệch lớn đối với nhau thì không nên lấy số trung bình cộng làm "đại diện" cho dấu hiệu đó.

Số trung bình cộng có thể không thuộc dãy giá trị của dấu hiệu.

3. Mốt của dấu hiệu

Mốt của dấu hiệu là *giá trị có tần số lớn nhất* trong bảng "tần số" kí hiệu là M_0.

Ví dụ 1. Điểm bài kiểm tra toán của lớp 7B học kì I năm 2006 như sau:

Điểm số	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	0	2	3	4	5	10	4	5	6	3	3

Bảng 19

a) Cho biết có bao nhiêu học sinh tham gia kiểm tra;

b) Tính điểm trung bình bài kiểm tra toán của lớp 7B học kì I;

c) Tính mốt của dấu hiệu.

Giải

a) Số học sinh tham gia kiểm tra Toán học kì I của lớp 7B là:

$$N = 2 + 3 + 4 + 5 + 10 + 4 + 5 + 6 + 3 + 3 = 45 \text{ (học sinh)}$$

b) Điểm trung bình của bài kiểm tra Toán là

$$\overline{X} = \frac{1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + 4\times 5 + 5\times 10 + 6\times 4 + 7\times 5 + 8\times 6 + 9\times 3 + 10\times 3}{45}$$

$= 5,64$

c) Giá trị 5 có tần số lớn nhất là 10. Vậy $M_0 = 5$

Ví dụ 2

Khối lượng của 40 con ngựa được chọn ngẫu nhiên trong hai lô thử nghiệm và đối chứng (được làm tròn đến kg) được cho hai bảng sau:

Lô thử nghiệm

130	128	121	140	130	121		
128	135	135	138	128	140		
130	135	138	130	138	130	130	135

Bảng 20

Lô đối chứng

130	120	135	140	128	133		
128	123	130	135	130	123		
133	130	120	130	123	128	128	133

Bảng 21

a) Hãy lập bảng "tần" của mỗi lô *(bảng 20, bảng 21)*;

b) Tính số trung bình cộng trong mỗi lô, nêu ý nghĩa của giá trị trung bình.

Giải:

a) Bảng "tần số" của lô thử nghiệm

X	Tần số (n)
$x_1 = 121$	$n_1 = 2$
$x_2 = 128$	$n_2 = 3$
$x_3 = 130$	$n_3 = 6$
$x_4 = 135$	$n_4 = 4$
$x_5 = 138$	$n_5 = 3$
$x_6 = 140$	$n_6 = 2$

Bảng 22

Bảng tần số của lô đối chứng

X	Tần số (n)
$x_1 = 120$	$n_1 = 2$
$x_2 = 123$	$n_2 = 3$
$x_3 = 128$	$n_3 = 4$
$x_4 = 130$	$n_4 = 5$
$x_5 = 135$	$n_5 = 3$
$x_6 = 135$	$n_6 = 2$
$x_7 = 140$	$n_7 = 1$

Bảng 23

b) Khối lượng trung bình của một con ngựa.

Lô thử nghiệm

$$\overline{X} = \frac{x_1n_1 + x_2.n_2 + ... + x_6.n_6}{N} \qquad \overline{X} = \frac{x_1n_1 + x_2.n_2 + ... + x_7.n_7}{N}$$

$$\overline{X}_1 = \frac{2640}{20} = 132 \qquad \overline{X}_2 = \frac{2580}{20} = 129$$

Như vậy khối lượng trung bình của lô thử nghiệm cao hơn lô đối chứng.

II. BÀI TẬP

1. Để nghiên cứu năng suất lúa xuân ở một huyện miền núi người ta chọn ngẫu nhiên 50 thửa ruộng được ghi lại trong *(bảng 24)* dưới đây (năng suất được tính theo tạ/ha).

30	38	30	30	36	42	35	34	34	34
35	35	36	35	35	42	38	35	35	30
35	34	35	38	35	36	30	34	34	35
42	34	35	35	38	34	42	44	36	34
36	36	42	34	35	44	35	36	38	44

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu là gì?

b) Lập bảng tần số của dấu hiệu.

c) Tính năng suất trung bình của 50 thửa ruộng đó.

d) Tìm mốt của dấu hiệu.

2. Cân thử 20 con lợn chọn ngẫu nhiên của Hợp tác xã chăn nuôi được ghi lại như sau (kế hoạch đề ra khối lượng mỗi con lợn không dưới 130 kg):

Có 2 con nặng 121 kg

Có 3 con nặng 128 kg

Có 6 con nặng 130 kg

Có 4 con nặng 135 kg

Có 3 con nặng 138 kg

Có 2 con nặng 140 kg

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu là gì? số các giá trị của dấu hiệu;

b) Tính số trung bình cộng của dấu hiệu;

c) Tính mốt của dấu hiệu;

d) Có bao nhiêu phần trăm con lợn đạt được kế hoạch đề ra về khối lượng.

3. Theo dõi vận tốc của 1 đoàn tầu hoả (tính ra km/giờ), kết quả được ghi lại như sau:

55 58 56 59 56 60 55 58 56 56

Hãy cho biết:

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu là gì?

b) Số tất cả các giá trị của dấu hiệu là bao nhiêu?

c) Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu?

d) Lập bảng tần số các giá trị của dấu hiệu.

e) Tính số trung bình cộng của các giá trị.

4. Một bạn gieo một con xúc xắc 20 lần. Kết quả được ghi lại là:

1	4	3	5	6	1	2	4	6	5
2	3	4	5	2	6	1	6	4	2

a) Dấu hiệu là gì?

b) Lập bảng tần số.

c) Tính số trung bình trong một lần gieo;

d) Cho nhận xét.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) Dấu hiệu cần tìm hiểu là năng suất của một thửa ruộng.

b) Ta có bảng "tần số" của dấu hiệu:

X	Tần số (n)
$x_1 = 30$	$n_1 = 5$
$x_2 = 34$	$n_2 = 10$
$x_3 = 35$	$n_3 = 15$
$x_4 = 36$	$n_4 = 7$
$x_5 = 37$	$n_5 = 5$
$x_6 = 42$	$n_6 = 5$
$x_7 = 44$	$n_7 = 3$

Bảng 24

c) $\overline{X} = \dfrac{30.5 + 34.10 + 35.15 + 36.7 + 37.5 + 42.5 + 44.3}{50}$

≈ 36 (tạ/ha)

d) Mốt của dấu hiệu $M_0 = 35$

2. a) Dấu hiệu: Khối lượng (tính bằng kg) của một con lợn. số các giá trị: 20

b) ta có *(bảng 25)* của dấu hiệu

X	Tần số (n)	Các tích (x.n)	
121	2	121 × 2 = 242	
128	3	128 × 3 = 384	
130	6	130 × 6 = 780	
135	4	135 × 4 = 540	
138	3	138 × 3 = 414	
140	2	140 × 2 = 280	
	N = 20	Tổng = 2640	$\overline{X}$ = 132

c) Mốt của dấu hiệu: M_0 = 130 (ứng với tần số lớn nhất n = 6);

d) Có 6 + 4 + 3 + 2 = 15 con lợn đạt được khối lượng đề ra không dưới 130 kg.

Tỉ số con lợn đạt kế hoạch đề ra về khối lượng với tổng 20 số lợn là $\frac{15}{20}$ = 75%

3. a) Dấu hiệu cần tìm hiểu là vận tốc của tàu;

b) Số tất cả các giá trị của dấu hiệu là: 10;

c) Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu là: 5;

d) Bảng tần số:

Giá trị (x)	55	56	58	59	60	
Tần số (n)	2	4	2	1	1	N = 10

e) Số trung bình cộng:

Vận tốc (x)	Tần số (n)	Các tích (x.n)	
55	2	110	
56	4	224	
58	2	116	
59	1	59	
60	1	60	
	N = 10	Tổng số: 569	$\overline{X} = \frac{569}{10} = 56,9$

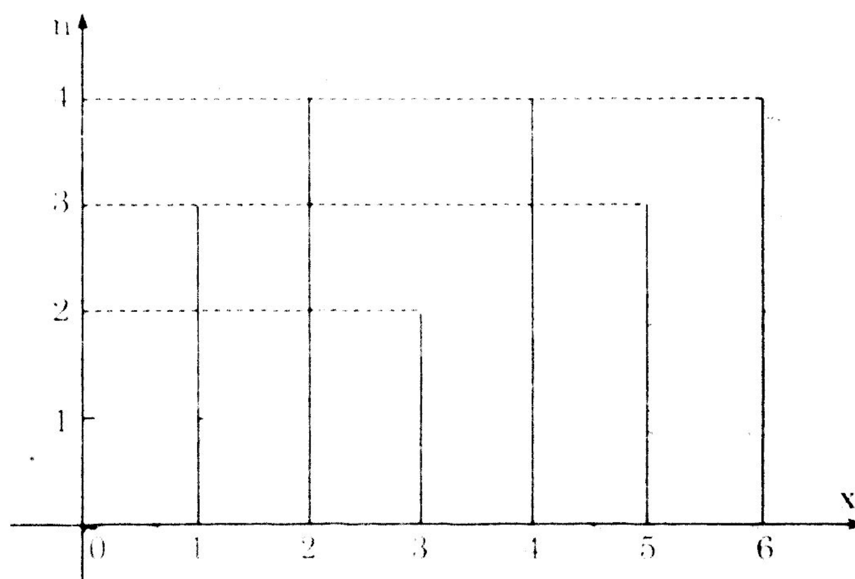
4. a) Dấu hiệu: Số chấm xuất hiện trong mỗi lần gieo;

b)

Mặt số xuất hiện (x)	1	2	3	4	5	6	
Tần số (n)	3	4	2	4	3	4	n = 20

c) $\overline{X} = \dfrac{1.3 + 2.4 + 3.2 + 4.4 + 5.3 + 6.4}{20} = 3,6$;

d)



Hình 9

e) Số chấm 2, 4, 6 xuất hiện như nhau và cao nhất (4 lần).

Số chấm 3 tần số xuất hiện thấp nhất (2 lần).

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

1. Điều tra trình độ học vấn của công nhân một xưởng in ta có bảng số liệu sau:

có 10 công nhân học hết lớp 8;

có 20 công nhân học hết lớp 10;

có 20 công nhân học hết lớp 11;

có 50 công nhân học hết lớp 12;

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu là gì? số các giá trị của dấu hiệu;

b) Lập bảng "tần số" của dấu hiệu.

c) Biểu diễn tần số của dấu hiệu bằng biểu đồ đoạn thẳng.

2. Cân lần lượt 30 quả cam (đơn vị gram) ta được kết quả sau

94	91	86	87	92	88	90	91	89	92
92	86	87	88	91	92	89	90	93	94
90	91	87	86	88	94	92	91	93	92

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu là gì? số các giá trị của dấu hiệu;

b) Lập bảng tần số và tần suất của dấu hiệu;

c) Biểu diễn tần suất của dấu hiệu bằng biểu đồ hình quạt;

d) Tính số trung bình cộng và mốt của dấu hiệu.

3. Theo dõi mức nước tiêu thụ (tính ra m^3) trong 1 tháng của 15 gia đình được ghi lại như sau:

24 (m^3)	25	20	24	25	20	22
25	23	24	22	20	24	25	24

Hãy cho biết:

a) Số các đơn vị điều tra;

b) Dấu hiệu cần tìm hiểu;

c) Số tất cả các giá trị của dấu hiệu;

d) Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu;

e) Lập bảng tần số các giá trị của dấu hiệu;

g) Tính số trung bình cộng của các giá trị.

4. Một trường THCS có 20 lớp. Sơ kết học kì I, có 4 lớp đạt tiên tiến xuất sắc, 7 lớp tiên tiến, còn lại là trung bình. Hãy vẽ biểu đồ hình quạt biểu diễn kết quả đó.

5. Một cửa hàng bán áo sơ mi nam trong một tháng có các cỡ như sau:

Cỡ áo (x)	36	37	38	39	40	41	42
Số áo bán (n)	10	30	50	80	40	10	5

Hãy cho biết:

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu là gì?

b) Số tất cả các giá trị của dấu hiệu là bao nhiêu?

c) Số các giá trị khác nhau là bao nhiêu?

d) Dựng biểu đồ đoạn thẳng;

e) Tìm mốt.

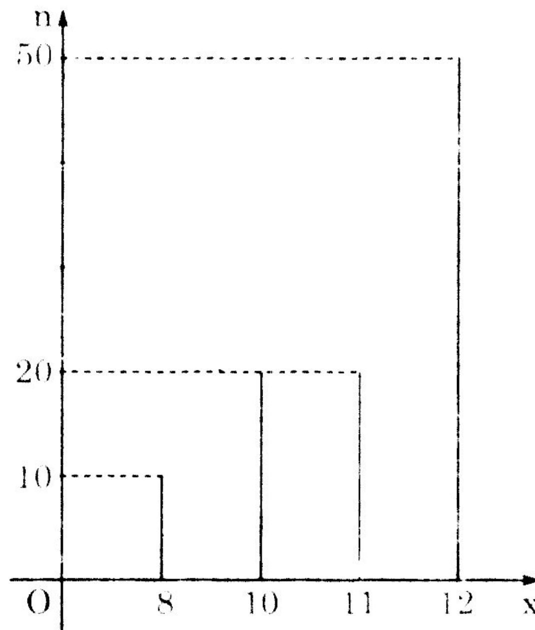
Hướng dẫn giải

1. a) Dấu hiệu cần tìm hiểu là trình độ học vấn của mỗi công nhân của một xưởng in. Số các giá trị của dấu hiệu: 100

b)

Giá trị lớp (x)	8	10	11	12
Tần số (n)	10	20	20	50

c)



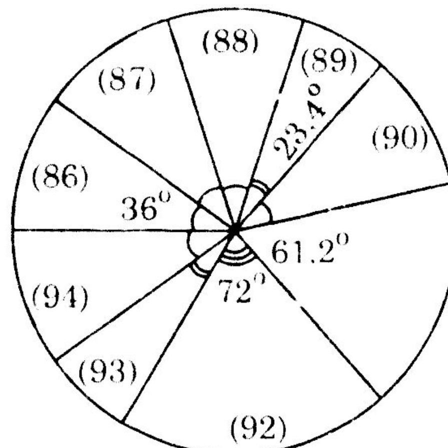
Hình 10

2. a) Dấu hiệu cần tìm hiểu là khối lượng của mỗi quả cam. Số các giá trị của dấu hiệu là 30;

b)

Giá trị (x)	86	87	88	89	90	91	92	93	94
Tần số (n)	3	3	3	2	3	5	6	2	3
Tần suất (f)	10%	10%	10%	6,5%	10%	17%	20%	6,5%	10%

c) Biểu đồ hình quạt:



Hình 11

d) Số trung bình cộng của dấu hiệu là:

$$\overline{X} = \frac{86 \times 3 + 87 \times 3 + 88 \times 3 + 89 \times 2 + 90 \times 3 + 91 \times 5 + 92 \times 6 + 93 \times 2 + 94 \times 3}{30}$$

$$= \frac{2706}{30} = 90{,}2$$

Mốt của dấu hiệu là: $M_0 = 92$

3. a) Số các đơn vị điều tra: 15 gia đình.

b) Dấu hiệu cần tìm hiểu: mức nước tiêu thụ trong 1 tháng

c) Số tất cả các giá trị của dấu hiệu: 15

d) Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu: 5

e) Bảng tần số

Giá trị (x)	20	22	23	24	25	
Tần số (n)	3	2	1	5	4	N = 15

g) Số trung bình cộng của các giá trị

$$\overline{X} = \frac{20.3 + 22.2 + 23.1 + 24.5 + 25.4}{15} \approx 23{,}13$$

4. HS tự giải.

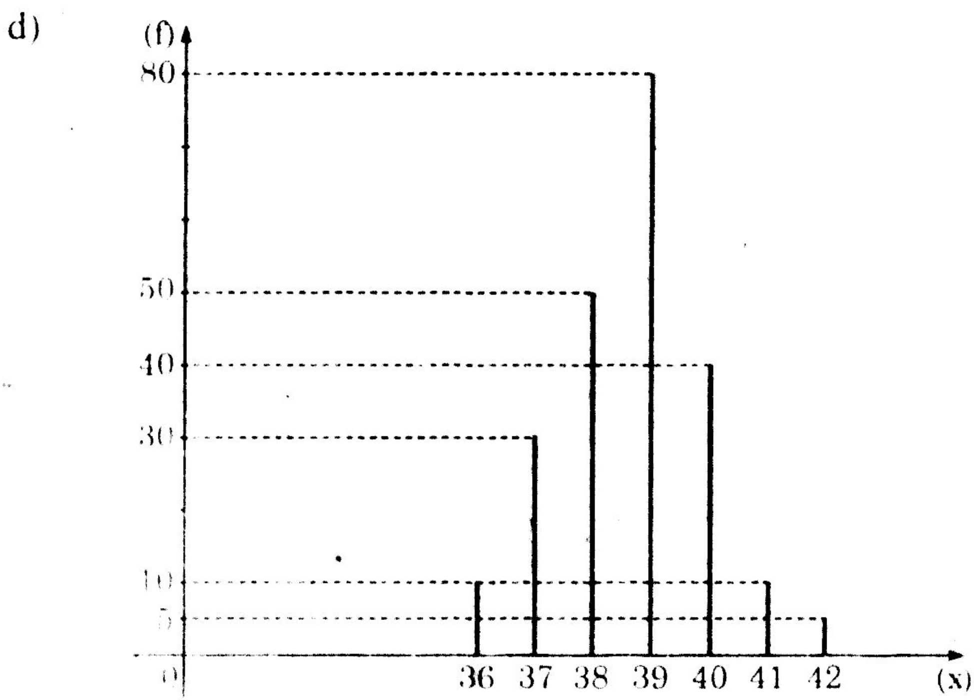
5. a) Dấu hiệu cần tìm hiểu là cỡ áo sơ mi (nam) nào bán chạy nhất.

b) Số tất cả các giá trị của dấu hiệu là:

$$10 + 30 + 50 + 80 + 40 + 10 + 5 = 225$$

c) Số tất cả các giá trị khác nhau là 7.

d)



Hình 12

Chương IV

BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

§1. KHÁI NIỆM VỀ BIỂU THỨC ĐẠI SỐ – GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Biểu thức đại số

• Một biểu thức gồm các số và các chữ (đại diện cho các số) và các phép toán (cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa) trên các số và các chữ đó gọi là *biểu thức đại số*.

• Các chữ (đại diện cho các số thuộc một tập hợp số nào đó) gọi là *biến số*. Các chữ biểu thị cho một số xác định gọi là *hằng số* (hằng).

Người ta thường dùng các chữ x, y, z... để chỉ biến, a, b, c... để chỉ hằng.

Chẳng hạn trong biểu thức ax + b thì x là biến, a, b là hằng.

• Biểu thức đại số không chứa biến ở mẫu gọi là *biểu thức nguyên*. Biểu thức có chứa biến ở mẫu gọi là *biểu thức phân*.

• Chú ý

* Trong biểu thức đại số vì chữ là đại diện cho số nên khi thực hiện các phép toán trên các chữ ta có thể áp dụng những tính chất, quy tắc phép toán như trên các số.

Chẳng hạn $a + b = b + a$; $ab = ba$; $a.a.a = a^3$

$(a + b) + c = a + (b + c)$; $(ab)c = a(bc)$...

* Các biểu thức phân như: $\frac{3x + y}{2y}$; $\frac{3abx + c}{5x}$; ... chưa xét ở chương này.

2. Giá trị của một biểu thức đại số

• Khi thay các biến của một biểu thức đại số bằng những số đã cho rồi thực hiện các phép toán đã chỉ ra trong biểu thức ấy (nếu có thể) ta được một kết quả bằng số gọi là giá trị của biểu thức đại số tại những giá trị đã cho của các biến.

• Một biểu thức nguyên xác định tại mọi giá trị của biến.

3. Biểu thức bằng nhau

Hai biểu thức đại số có cùng một giá trị với mọi giá trị của biến lấy trên những tập hợp số xác định nào đó gọi là hai biểu thức đại số bằng nhau trên tập hợp số đó.

II. BÀI TẬP

1. Hãy viết biểu thức đại số diễn đạt các nội dung sau:

a) Tích của hai số x và y cộng với hiệu của chúng;

b) Hiệu lập phương của hai số x và y nhân với tổng các lập phương của 2 số đó;

c) Lập phương của tổng hai số x và y chia cho lập phương của hiệu hai số đó ($x \neq y$).

2. Ba người đi xe đạp, xe máy và ô tô. Vận tốc xe đạp là 12 km/h, vận tốc xe máy gấp 4 lần vận tốc xe đạp, vận tốc ô tô bằng tổng vận tốc xe đạp và xe máy.

a) Hãy viết biểu thức chỉ quãng đường của mỗi xe đi được sau t giờ;

b) Hãy xác định biến số trong mỗi biểu thức đó.

3. Một bể chứa nước hình hộp chữ nhật mà chiều dài, chiều rộng, chiều cao có số đo lần lượt là a, b, c.

a) Hãy viết biểu thức chỉ diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của bể nước đó;

b) Hãy xác định biến số trong mỗi biểu thức đó.

4. Chứng minh các đẳng thức:

a) $\dfrac{x^2y - xy}{x - 1} = xy$ với $x \neq 1$

b) $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + xy} = \dfrac{x - y}{x}$ với $x \neq -y$, $x \neq 0$.

5. Chứng minh rằng các biểu thức sau không bằng nhau:

a) $x - y$ và $y - x$;

b) $(x + 1)^2$ và $x^2 + 1$;

c) $(x - y)^3$ và $(y - x)^3$.

6. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{2x - 3y}{2x + 3y} \text{ biết } \frac{x}{18} = \frac{y}{9} \quad (y \neq 0)$$

7. Xét biểu thức:

$$A = \frac{x - y}{x + y} + \frac{x + y}{x - y}$$

a) Tính giá trị của A biết $x + 2y = 0$ và $y \neq 0$

b) Tại những giá trị nào của biến thì tính được giá trị của A?

8. Xét biểu thức $B = \dfrac{x-6}{x+3}$

a) Tại những giá trị nào của x thì tính được giá trị của B?

b) Với những giá trị nguyên nào của x thì giá trị của B là số nguyên?

c) Tìm giá trị nguyên lớn nhất và giá trị nguyên nhỏ nhất của B.

9. Chứng minh rằng nếu $|a| \geq 2$ và $|b| \geq 2$ thì giá trị của hai biểu thức $A = \dfrac{a+b}{ab}$ và $B = \dfrac{2006}{2005}$ không bằng nhau.

10. Chứng tỏ rằng $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ thì giá trị của biểu thức luôn là số dương

$$M = \frac{3(x^2+1)+x^2y^2+y^2-2}{(x+y)^2+5}.$$

11. Tìm cặp số nguyên dương (x, y) để biểu thức sau có giá trị là số nguyên

$$A = \frac{2x+2y-3}{x+y}.$$

12. Tìm GTLN của biểu thức:

$$B = \frac{x^2+y^2+3}{x^2+y^2+2}.$$

13. Xác định a và b biết rằng:

a) $3x = (a+b)x + 2a - b$; b) $(x+a)(bx-1) = x^2 - 7x + 6$.

14. Chứng minh đẳng thức:

$$\frac{3y(x+1)-6x-6}{3y-6} = \frac{2(y+3)+2xy+6x}{2y+6} \quad (y \neq 2;\ y \neq -3).$$

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) $xy + (x - y)$;

b) $(x^3 - y^3)(x^3 + y^3)$;

c) $(x+y)^3 : (x-y)^3$ $(x \neq y)$.

2. a) Quãng đường xe máy đi được sau t giờ là: 12 t (km)

Quãng đường xe máy đi được sau t giờ là: 4.12.t = 48 t

Quãng đường ô tô đi được sau t giờ là: (12 + 4.12)t = 60 t;

b) Biến số trong mỗi biểu thức trên là t.

3. a) – Diện tích xung quanh bể nước:

$$S_{xq} = (a + b).2.c = 2(a + b).c$$

– Diện tích toàn phần bể nước:

$$S_{tp} = 2(a + b)c + 2ab = 2[(a + b).c + ab]$$

– Thể tích của bể chứa nước:

$$V = abc$$

b) Biến số trong mỗi biểu thức trên là a, b và c.

4. a) Cho $x = 0$, $\frac{x^2y - xy}{x - 1} = \frac{0 - 0}{0 - 1} = 0$

$xy = 0$, $y = 0$;

Cho $y = 0, \frac{x^2y - xy}{x - 1} = \frac{0 - 0}{x - 1} = 0$

$xy = x.0 = 0$;

Cho $x = 2$, $y = 1$, $\frac{x^2y - xy}{x - 1} = \frac{4 - 2}{2 - 1} = 2$

$xy = 2.1 = 2$;

Cho x, y bất kì giá trị nào sao cho $x \neq 1$ thì ta được giá trị của biểu thức ở hai vế bằng nhau.

Vậy $\frac{x^2y - xy}{x - 1} = xy$ với $x \neq 1$.

b) Cho $x = 1$, $y = 1$ ta có

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + xy} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$$

$$\frac{x - y}{x} = \frac{1 - 1}{1} = 0.$$

Cho $x = 1$, $y = 2$

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + xy} = \frac{1 - 4}{1 + 2} = -1$$

$$\frac{x - y}{x} = \frac{1 - 2}{1} = -1$$

Cho $x = 2$, $y = 1$

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + xy} = \frac{4 - 1}{4 + 2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x-y}{x}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$$

Cho x, y bất kì giá trị nào sao cho $x \neq -y$ và $x \neq 0$ ta được giá trị của biểu thức ở hai vế bằng nhau.

Vậy $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+xy}=\dfrac{x-y}{x}$.

5. a) Cho $x = 2$; $y = 1$, ta có:

$$x - y = 2 - 1 = 1$$

$$y - x = 1 - 2 = -1$$

Vậy $x - y \neq y - x$;

b) Cho $x = 1$, ta có:

$$(x+1)^2 = (1+1)^2 = 4$$

$$x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$$

Vậy $(x+1)^2 \neq x^2 + 1$.

c) Cho $x = 1$, $y = 2$, ta có:

$$(x-y)^3 = (1-2)^3 = (-1)^3 = -1$$

$$(y-x)^3 = (2-1)^3 = 1^3 = 1.$$

Vậy $(x-y)^3 \neq (y-x)^3$.

6. $\dfrac{x}{18}=\dfrac{y}{9} \Leftrightarrow x = 2y$

$$P=\frac{2x-3y}{2x+3y}=\frac{2.2y-3y}{2.2y+3y}=\frac{4y-3y}{4y+3y}=\frac{y}{7y}=\frac{1}{7}\ (y \neq 0).$$

7. a) $A=\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{(x+2y)-3y}{(x+2y)-y}+\dfrac{(x+2y)-y}{(x+2y)-3y}$

$$=\frac{0-3y}{0-y}+\frac{0-y}{0-3y}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}\ (y \neq 0);$$

b) Tính được giá trị của A tại những giá trị của các biến thoả mãn:

$$\begin{cases} x+y \neq 0 \\ x-y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -y \\ x \neq y \end{cases}$$

Vậy tính được giá trị của A tại những giá trị của x và y thoả mãn điều kiện $x \neq \pm y$.

8. $B = \dfrac{x-6}{x+3}$.

a) Tính được giá trị của B tại những giá trị của x thoả mãn $x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$.

b) $B = \dfrac{x-6}{x+3} = \dfrac{(x+3)-9}{x+3} = \dfrac{x+3}{x+3} - \dfrac{9}{x+3} = 1 - \dfrac{9}{x+3}$

B có giá trị là số nguyên khi và chỉ khi $\dfrac{9}{x+3}$ là số nguyên. Khi đó x + 3 là ước của 9, mà ước của 9 là ± 1, ± 3, ± 9

$x + 3$	-1	1	-3	3	-9	9
x	-4	-2	-6	0	-12	6
$B = \dfrac{x-6}{x+3}$	10	-8	4	-2	2	0

Vậy nếu x có giá trị −4; −2; −6; 0; −12; 6 thì B có giá trị là các số nguyên 10; −8; 4; −2; 2; 0.

c) Giá trị nguyên lớn nhất của B là 10 và giá trị nguyên nhỏ nhất của B là −8

9. $\dfrac{1}{a} \leq \dfrac{1}{|a|} \leq \dfrac{1}{2}$ (vì $|a| \geq 2$) (1)

$\dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{|b|} \leq \dfrac{1}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{a+b}{ab} \leq 1$

Vậy $A = \dfrac{a+b}{ab} \leq 1$ mà $B = \dfrac{2006}{2005} > 1$. Suy ra $A \neq B$.

10. $M = \dfrac{3(x^2+1) + x^2y^2 + y^2 - 2}{(x+y)^2 + 5}$

$= \dfrac{3(x^2+1) + y^2(x^2+1) - 2}{(x+y)^2 + 5} = \dfrac{(x^2+1)(y^2+3) - 2}{(x+y)^2 + 5}$

$\forall x, y \in \mathbb{Q}$ ta có: $x^2 + 1 \geq 1$; $y^2 + 3 \geq 3$ nên

$(x^2 + 1)(y^2 + 3) \geq 3$,

suy ra $(x^2+1)(y^2+3) - 2 \ge 1 > 0$ (1)

và $(x+y)^2 + 5 \ge 5 > 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $M > 0$.

11. $A = \dfrac{2x+2y-3}{x+y} = \dfrac{2(x+y)}{x+y} - \dfrac{3}{x+y} = 2 - \dfrac{3}{x+y}$

Để A có giá trị là số nguyên thì $(x+y)$ là ước của 3. Mà, khác x, y là các số nguyên dương, $x \ge 1$, $y \ge 1$. Do đó $x + y = 3$. Suy ra:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} ; \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

12. $B = \dfrac{x^2+y^2+3}{x^2+y^2+2} = \dfrac{x^2+y^2+2}{x^2+y^2+2} + \dfrac{1}{x^2+y^2+2} = 1 + \dfrac{1}{x^2+y^2+2}$

B lớn nhất khi và chỉ khi $\dfrac{1}{x^2+y^2+2}$ lớn nhất.

$x^2 \ge 0$; $y^2 \ge 0$, nên $x^2 + y^2 + 2 \ge 2$

do đó $x^2 + y^2 + 2$ nhỏ nhất bằng 2 khi $x = y = 0$

Vậy $B_{\text{lớn nhất}} = 1 + \dfrac{1}{2} = 1\dfrac{1}{2}$ khi $x = y = 0$

13. HS tự làm.

14. $VT = \dfrac{3y(x+1) - 6x - 6}{3y - 6} = \dfrac{3y(x+1) - 6(x+1)}{3(y-2)}$

$= \dfrac{3(x+1)(y-2)}{3(y-2)} = x + 1$ $(y \ne 2)$ (1)

$VP = \dfrac{2(y+3) + 2xy + 6x}{2y+6} = \dfrac{2(y+3) + 2x(y+3)}{2(y+3)}$

$= \dfrac{2(x+1)(y+3)}{2(y+3)} = x + 1$ $(y \ne -3)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{3y(x+1) - 6x - 6}{2y - 6} = \frac{2(y+3) + 2xy + 6x}{2y + 6}$$

§2. ĐƠN THỨC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đơn thức

Đơn thức là biểu thức đại số chỉ gồm một số, hoặc một biến hoặc một tích của các số và các biến.

Chẳng hạn: 9; 0; $3x^2y$; $\frac{2}{3}x^2y^2$... là đơn thức

2. Đơn thức thu gọn

Đơn thức thu gọn là đơn thức chỉ gồm tích của một số với các biến mà mỗi biến đã được nâng lên luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

Chẳng hạn, đơn thức $5x^3y^2$ thì 5 là hệ số, x^3y^2 là phần biến số.

3. Bậc của đơn thức

- Bậc của đơn thức đối với một biến là số mũ của biến đó trong dạng thu gọn của đơn thức.
- Bậc của đơn thức có hệ số khác 0 là tổng số mũ của tất cả các biến đó trong dạng thu gọn của đơn thức đó.
- Số thực khác không có bậc 0, số 0 coi là đơn thức không có bậc.

Chẳng hạn, đơn thức $5x^2y^3z^5$ có bậc là $10(2 + 3 + 5 = 10)$

4. Nhân hai đơn thức

Để nhân hai đơn thức ta nhân các hệ số với nhau và nhân các biến với nhau.

Ví dụ 1. Thu gọn các đơn thức sau:

$$3xy^2(x^2y^3);\ 4x^4y^2\left(-\frac{1}{4}x^2y\right)x^3y^2$$

Giải

$$3xy^2(x^2y^3) = 3x^3y^5$$

$$4x^4y^2\left(-\frac{1}{4}x^2y\right)x^3y^2 = -x^9y^5$$

Ví dụ 2. Thu gọn rồi tính bậc của đơn thức sau

$$3x^2y^3\left(\frac{1}{3}xy\right)xy^2$$

Giải $3x^2y^3.\left(\frac{1}{3}xy\right)xy^2 = x^4y^6$

Bậc của đơn thức là 10 ($4 + 6 = 10$)

Ví dụ 3. Thực hiện phép nhân sau:

$$3x^2y.2xy^3.4x^3y^2$$

Giải $3x^2y.2xy^3.4x^3y^2 = (3.2.4).x^2y.xy^3.x^3y^2$

$$= 24x^6y^6.$$

II. BÀI TẬP

1. Thu gọn các đơn thức, chỉ ra phần hệ số, chỉ ra bậc của chúng

a) $7y^3y^2x^2$; b) $5x^2y^3(-3xy)$; c) $\frac{1}{5}xy^2(-15x^3y)yx^2$

2. Thực hiện các phép nhân đơn thức

a) $5x^2y.0,8xy^3.10x^3y$;

b) $-0,5a^2b.(-2ab^2c).8c^2b^2a$; c) $-0,32a^6b^5(-100ab^2).a^4b^6$.

3. Tìm đơn thức P biết:

a) $P - 4x^3y = -5x^5y^3$; b) $-2xy^2.P = 6x^{k+1}y^2$ ($k \in N$)

4. Tìm đơn thức Q biết:

a) $Q.\left(\frac{1}{2}x^2y\right)^3 = (2x^3y)^3$; b) $(-9x^3y^4)^2.(2xy) = \left(\frac{1}{3}x^2y^2\right)^2.Q$.

5. Tìm các số a, b, c thoả mãn các điều kiện sau:

$$ab = \frac{1}{10};\ ac = \frac{-1}{20} \text{ và } bc = \frac{-1}{50}.$$

6. Tìm đơn thức P biết:

a) $P.2x^ky^{k-1} = -\frac{1}{2}x^{k+2}y^{k+1}$ ($k \in N, k \geq 1$)

b) $2x^{k-1}y^k.P = x^ky^{k+5}$ ($k \in N, k > 1$).

7. Thu gọn các đơn thức sau:

a) $(2x^2y^3z^4)^2.(-x^3y^2z)^4$.

b) $(a^nb^{n+1}c^n)^k.(a^kb^kc^{k+1})^n$ ($k, n \in N$).

8. Tìm các số x, y, z thoả mãn các điều kiện sau:

$$x^2yz = -2;\ xy^2z = 2 \text{ và } xyz^2 = -2.$$

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) $7y^3yx^2 = 7y^4x^2$ có hệ số 7; có bậc 6;

b) $5x^2y^2(-3)y = -15x^2y^3$ có hệ số là 4; có bậc 5;

c) $\frac{1}{5}xy^2(-15x^3y)yx^2 = -3x^6y^4$ có hệ số là -3; có bậc 10.

2. a) $5x^2y.0{,}8xy^3.10x^3y = 40\,x^6y^5$;

b) $-0{,}5a^2b.(-2ab^2c).8c^2b^2a = 8a^4b^5c^3$;

c) $-0{,}32a^6b^5.(-100ab^2).a^4b^6 = 32a^{11}b^{13}$.

3. a) $P.4x^3y = -5x^5y^3 = \frac{-5}{4}x^2y^2.4x^3y$. Vậy $P = -\frac{5}{4}x^2y^2$;

b) $-2xy^2.P = 6x^{k+1}y^2 = -2xy^2.(-3x^k)$. Vậy $P = -3x^k$ $(k \in \mathbb{N})$.

4. a) $Q.\left(\frac{1}{2}x^2y\right)^3 = (2x^3y)^3$

$Q.\frac{1}{8}x^6y^3 = 8x^9y^3 = 64x^3.\frac{1}{8}x^6y^3$. Vậy $Q = 64x^3$;

b) $(-9x^3y^4)^2.(2xy) = \left(\frac{1}{3}x^2y^2\right)^2.Q$

$81x^6y^8.2xy = \frac{1}{9}x^4y^4.Q$

$\frac{1}{9}x^4y^4.\ 1458x^3y^5 = \frac{1}{9}x^4y^4.Q$. Vậy $Q = 1458x^3y^5$.

5. • $ab = \frac{1}{10}$ (1); $ac = \frac{-1}{20}$ (2) và $bc = \frac{-1}{50}$ (3)

Từ (1) (2) (3) suy ra: $ab.ac.bc = \frac{1}{10}.\frac{-1}{20}.\frac{-1}{50} = \frac{1}{10000}$

$\Leftrightarrow (abc)^2 = \left(\frac{\pm 1}{100}\right)^2$. Suy ra $abc = \pm\frac{1}{100}$

• Xét trường hợp $abc = \frac{1}{100}$ (4)

Từ (1) và (4) ta có: $\begin{cases} abc = \frac{1}{100} \\ ab = \frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow c = \frac{1}{10}$

Từ (2) và (4) ta có: $\begin{cases} abc = \dfrac{1}{100} \\ ac = \dfrac{-1}{20} \end{cases}$ $\quad b = -\dfrac{1}{5}$

Từ (3) và (4) ta có: $\begin{cases} abc = \dfrac{1}{100} \\ bc = \dfrac{-1}{50} \end{cases} \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

• Xét trường hợp $abc = \dfrac{-1}{100}$ (5)

Từ (1) và (5) ta có: $\begin{cases} abc = \dfrac{-1}{100} \\ ab = \dfrac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow c = \dfrac{-1}{10}$

Từ (2) và (5) ta có: $\begin{cases} abc = \dfrac{-1}{100} \\ ac = \dfrac{-1}{20} \end{cases} \Rightarrow b = \dfrac{1}{5}$

Từ (3) và (5) ta có: $\begin{cases} abc = \dfrac{-1}{100} \\ bc = \dfrac{-1}{50} \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

• Vậy ta có:

$$\begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{1}{5} \\ c = \dfrac{1}{10} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1}{5} \\ c = \dfrac{-1}{10} \end{cases}.$$

6. a) $P.2k^k y^{k-1} = -\dfrac{1}{2}x^{k-2}y^{k+1}$

$P.2x^k y^{k-1} = 2x^k y^{k-1}.\left(-\dfrac{1}{4}x^2y^2\right)$

Suy ra: $P = -\dfrac{1}{4}x^2y^2$

b) $3x^{k-1}y^k.P = x^k y^{k+5}$

$3x^{k-1}y^k.P = 3x^{k-1}y^k.\dfrac{1}{3}xy^5$

Suy ra: $P = \dfrac{1}{3}xy^5$

7. a) $(2x^2y^3z^4)^2(-x^3x^2z)^4 = 4x^4y^6z^8.x^{12}y^8z^4 = 4x^{16}y^{14}z^{12}$

b) $(a^nb^{n+1}c^n)^k.(a^kb^kc^{k+1})^n = a^{nk}b^{nk+k}c^{nk}.a^{nk}.b^{kn}c^{kn+n}$

$= a^{2nk}.b^{2nk+k}c^{2nk+n} = a^{2nk}b^{k(2n+1)}c^{n(2k+1)}$.

8. $x^2yz = -2$; $xy^2x = 2$ và $xyz^2 = -2$ nên $x^2yz.xy^2z.xyz^2 = (-2).2.(-2) = 8$

Vậy $x^3y^3z^3 = 8 \Rightarrow xyz = 2$

Ta lại có: $\dfrac{x^2yz}{xyz} = \dfrac{-2}{2} \Rightarrow x = -1$;

$\dfrac{xy^2z}{xyz} = \dfrac{2}{2} \Rightarrow y = 1$ $\quad\quad$ $\dfrac{xyz^2}{xyz} = \dfrac{-2}{2} \Rightarrow z = -1$.

§3. ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG – CỘNG TRỪ ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đơn thức đồng dạng

• Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức có hệ số khác 0 và có cùng phần biến.

Chẳng hạn, $3x^2yz$; $-\frac{1}{2}x^2yz$ và $5x^2yz$ là ba đơn thức đồng dạng.

• Các số 0 được coi là những đơn thức đồng dạng.

2. Cộng, trừ các đơn thức đồng dạng

Muốn cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.

Ví dụ 1. Hãy xếp các đơn thức sau thành nhóm các đơn thức đồng dạng:

$3a^2b$; $5ab^3$; $6a^2b^2$; $7ab^3$; $11a^2b^2$; $6a^2b$; $-\frac{1}{5}ab^3$.

Giải

$3a^2b$; $6a^2b$

$5ab^3$; $7ab^3$; $-\frac{1}{5}ab^3$

$6a^2b^2$; $11a^2b^2$

Ví dụ 2. a) Tìm tổng $P = 4xy^2 - 5xy^2 - 7xy^2 + 3xy^2$;

b) Tìm giá trị của P biết $x = 1$ và $y = -1$.

Giải. a) $P = (4xy^2 + 3xy^2) - (5xy^2 + 7xy^2)$

$= 7xy^2 - 12xy^2 = -5xy^2$;

b) Với $x = 1$ và $y = -1$ thì $P = -5.1.(-1)^2 = -5$.

II. BÀI TẬP

1. Điền các đơn thức thích hợp vào ô trống

a) $5x^3y^2 + \square = 7x^3y^2$; b) $\square - 5x^3 = -3x^3$;

c) $\square + \square - \square = x^3y^2$.

2. Tìm tổng rồi tính giá trị của tổng tại $x = \frac{1}{2}$ và $y = -1$

a) $10x^2y + 5x^2y - 7x^2y - 5x^2y$; b) $8xy - 7xy + 5xy - 2xy$;

c) $-4x^3y + 3x^3y + x^3y - 2x^3y$.

3. Cộng, trừ đơn thức:

a) $\frac{1}{2}x^2y + \frac{3}{4}x^2y - \frac{2}{3}x^2y - \frac{1}{3}x^2y$;

b) $5a^n - 2a^{n+1} - 4a^n + 7a^{n+1} - a^n + a^{n+1} - 6a^{n+1}$ $(n \in N)$.

4. Tìm đơn thức M biết:

a) $M - 4a^2bc^3 = \frac{1}{2}a^2bc^3 + \frac{1}{3}a^2bc^3 - \frac{2}{3}a^2bc^3$;

b) $(2a^2x^2)^3 + M = (3a^3x^3)^2 - 5(a^2x^2)^3 + (-ax)^6$.

5. Cho các đơn thức: $A = x^2y$ và $B = xy^2$

a) Chứng tỏ rằng nếu $2x + y = 1$ thì $2A + B = xy$.

b) Chứng tỏ rằng nếu $x \in Z$, $y \in Z$ và $x - 3y$ chia hết cho 11 thì $A - 3B$ cũng chia hết cho 11.

6. Cho biểu thức:

$$P = 2a^{2n+1} - 3a^{2n} + 5a^{2n+1} - 7a^{2n} + 3a^{2n+1} \ (n \in N)$$

Với giá trị nào của a thì $P > 0$?

7. Cho biểu thức

$$Q = 5x^{k+2} + 3x^k + 2x^{k+2} - 4x^k - x^{k+2} + x^k \ (k \in N)$$

Với giá trị nào của x và k thì $Q < 0$?

8. Tìm x biết:

$x^n - 2x^{n+1} + 5x^n - 4x^{n+1} = 0$ $(n \in N, n \neq 0)$.

9. $M = 3a^2x^2 + 4b^2x^2 - 2a^2x^2 - 3b^2x^2 + 19 (a \neq 0, b \neq 0)$.

Tìm GTNN của M.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) $5x^3y^2 + \square = 7x^3y^2$ nên $\square = 7x^3y^2 - 5x^3y^2 = 2x^3y^2$;

b) $\square - 5x^3 = -3x^3 \Rightarrow \square = -3x^3 + 5x^3 = 2x^3$;

c) $2x^3y^2 + 3x^3y^2 - 4x^3y^2 = x^3y^2$ (bài toán có nhiều lời giải)

2. a) $P = 10x^2y + 5x^2y - (7 + 5)x^2y = (15 - 12)x^2y = 3x^2y$.

Với $x = \frac{1}{2}$ và $y = -1$ ta có $P = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^2.(-1) = -\frac{3}{4}$;

b) $Q = \underbrace{8xy - 7xy} + 5xy - 2xy$

$\underbrace{xy + 5xy} - 2xy$

$6xy - 2xy = 4xy$

$Q = 4.\frac{1}{2}.(-1) = -2$;

c) $R = 4x^3y + 3x^3y + x^3y - 2x^3y = 3x^3y + x^3y - (4x^3y + 2x^3y)$

$= 4x^3y - 6x^3y = -2x^3y$

$R = -2.\left(\frac{1}{2}\right)^3.(-1) = -2.\frac{1}{8}.(-1) = \frac{1}{4}$.

3. Cộng, trừ đơn thức:

a) $\frac{1}{2}x^2y + \frac{3}{4}x^2y - \frac{2}{3}x^2y - \frac{1}{3}x^2y = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)x^2y$

$= \frac{1}{4}x^2y$;

b) $5a^n - 2a^{n+1} - 4a^n + 7a^{n+1} - a^n + a^{n+1} - 6a^{n+1}$ $(n \in N)$

$= (7a^{n+1} - 6a^{n+1} + a^{n+1} - 2a^{n+1}) + (5a^n - 4a^n - a^n)$

$= (7 - 6 + 1 - 2).a^{n+1} + (5 - 4 - 1)a^n$

$= 0.a^{n+1} + 0.a^n = 0$.

4. a) $M - 4a^2bc^3 = \frac{1}{2}a^2bc^3 + \frac{1}{3}a^2bc^3 - \frac{2}{3}a^2bc^3$

$$M - 4a^2bc^3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)a^2bc^3$$

$$M - 4a^2bc^3 = \frac{1}{6}a^2bc^3.$$

$$M = 4a^2bc^3 + \frac{1}{6}a^2bc^3$$

Vậy $M = 4\frac{1}{6}a^2bc^3;$

b) $(2a^2x^2)^3 + M = (3a^3x^3)^2 - 5(a^2x^2)^3 + (-ax)^6$

$(2a^2x^2)^3 + M = 9a^6x^6 - 5a^6x^6 + a^6x^6$

$8a^6x^6 + M = (9 - 5 + 1)a^6x^6$

$M = 5a^6x^6 - 8a^6x^6$

$M = (5 - 8)a^6x^6$

Vậy $M = -3a^6x^6.$

5. $A = x^2y;\ B = xy^2$

a) $2A + B = 2x^2y + xy^2 = xy.(2x + y) = xy.1 = xy$

Vậy $2A + B = xy$

b) $A - 3B = x^2y - 3B = x^2y - 3xy^2 = (x - 3y)xy$ mà $x - 3y$ chia hết cho 11,

nên $(x - 3y)xy \vdots 11$

Vậy $A - 3B \vdots 11.$

6. $P = 2a^{2n+1} - 3a^{2n} + 5a^{2n+1} - 7a^{2n} + 3a^{2n+1}$

$= 10a^{2n+1} - 10a^{2n} = 10a^{2n}(a - 1)\ (n \in N).$

Có $a^{2n} \geq 0$ với $\forall a$ nên $P > 0$ khi $a - 1 > 0$. Vậy $a > 1$.

7. $Q = 5x^{k+2} + 3x^k + 2x^{k+2} + 4x^k + x^{k+2} + x^k$

$= 8x^{k+2} + 8x^k = 8x^k.(x^2 + 1)\ (k \in N).$

Có $x^2 \geq 0$ nên $x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

Suy ra $Q < 0$ khi $x^k < 0$;

mà $x^k < 0$ khi $x < 0$ và k là số tự nhiên lẻ.

Vậy $Q < 0$ khi $x < 0$ và k là số tự nhiên lẻ.

8. $x^n - 2x^{n+1} + 5x^n - 4x^{n+1} = 0$ ($n \in N$, $n \neq 0$)

$6x^n - 6x^{n+1} = 0$

$6x^n(1 - x) = 0$

* $6x^n = 0$ ($n \in N$, $n \neq 0$)

$x = 0$

* $1 - x = 0$

$x = 1$.

Vậy $x = 0$; $x = 1$.

9. $M = 3a^2x^2 + 4b^2x^2 - 2a^2x^2 - 3b^2x^2 + 19$

$= a^2x^2 + b^2x^2 + 19$

$= (a^2 + b^2).x^2 + 19$

Vì $a \neq 0$, $b \neq 0$ nên $a^2 + b^2 > 0$

Và $x^2 \geq 0$ với $\forall x$

Suy ra $(a^2 + b^2)x^2 \geq 0$; $M = (a^2 + b^2)x^2 + 19 \geq 19$.

Vậy GTNN của $M = 10$ khi $x = 0$.

§4. ĐA THỨC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đa thức

Đa thức là một tổng của những đơn thức. Mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử của đa thức đó.

Chẳng hạn, đa thức $3x^2 - 2x + 1$ thì $3x^2$, $-2x$, 1 gọi là hạng tử.

Người ta thường kí hiệu đa thức bằng các chữ in hoa A, B, C, M, N, P, Q...

2. Thu gọn đa thức

Một đa thức N có những hạng tử là những đơn thức đồng dạng. Thực hiện phép cộng, phép trừ các đơn thức đồng dạng ta được một đa thức không còn hạng tử nào đồng dạng, ta gọi đa thức này là dạng thu gọn của đa thức N.

Chẳng hạn $N = 3xy^2 + 5x^2y - 2xy^2 - 3x^2y - 3 + 5$

$= xy^2 + 2x^2y + 2$

Thì $xy^2 + 2x^2y + 2$ là dạng thu gọn của đa thức N

3. Bậc của đa thức

Bậc của đa thức là bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó. Chẳng hạn đa thức N có bậc 2.

Ví dụ 1. Thu gọn đa thức: $M = 2a^2x^3 - ax^3 - a^4 - a^2x^3 + ax^3 + 2a^4$

Giải. $M = 2a^2x^3 - ax^3 - a^4 - a^2x^3 + ax^3 + 2a^4$

$= (2a^2x^3 - a^2x^3) + (ax^3 - ax^3) + (2a^4 - a^4)$

$= a^2x^3 + a^4.$

Ví dụ 2. Bậc của đa thức:

$$M = 3x^3y + 5xy^5 - 3x^6y^7 + \frac{1}{3}x^3y - 2x^3y + 3x^6y^7 \text{ là:}$$

A. 4; B. 6; C. 13; D. 5

Giải. $M = 3x^3y + 5xy^5 - 3x^6y^7 + \frac{1}{3}x^3y - 2x^3y + 3x^6y^7 = 1\frac{1}{3}x^3y + 5xy^5$

Vậy bậc của đa thức M là 6, nên đáp án B đúng.

II. BÀI TẬP

1. Giá gạo tẻ là x (đ/kg), giá gạo nếp là y (đ/kg), giá ngô là z (đ/kg).

a) Hãy viết biểu thức đại số biểu thị số tiền mua 10 kg gạo tẻ, 3 kg gạo nếp và 1 kg ngô.

b) Biểu thức tìm được ở câu a) có phải là đa thức không?

2. Hãy viết biểu thức đại số diễn đạt nội dung sau: Hai lần tổng các bình phương của hai số x và y trừ đi 3 lần hiệu các bình phương của hai số x và y cộng với 4 lần tích hai số đó.

Biểu thức vừa tìm được có phải là đa thức không? Hãy thu gọn và xác định bậc của nó.

3. Cho đa thức:

$A = x^{2000}x^5 - x^{200}x^3 + 2x^{1990}x^{15} - 3x^{103}x^{100} + x^{10}x^3 - 2x^8x^5 + 2$

a) Thu gọn đa thức A;

b) Xác định bậc của A;

c) Tính giá trị của A biết $|x| = 1$.

4. Xét biểu thức:

$P = 3x^2y - [xyz - (2xyz - x^2z) - 4x^2z + [3x^2y - (4xyz - 5x^2z - 3xyz)]]$

a) Bỏ ngoặc rồi thu gọn;

b) Tính giá trị của P tại $x = -1$; $y = 2$; $z = 3$.

5. Xét đa thức:

$$P = 2a^{n+1} - 3a^{n} + 5a^{n+1} - 7a^{n} + 3a^{n+1} \ (n \in N)$$

a) Thu gọn P.

b) Với giá trị nào của a thì $P = 0$?

6. Với giá trị nào của x thì:

$$Q = 5x^{n+2} + 3x^{n} + 2x^{n+2} + 4x^{n} + x^{n+2} + x^{n} = 0? \ (n \in N).$$

7. Cho một đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$; a, b, c nguyên. Giả sử $f(x) \vdots 3$ khi x nguyên. Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 3.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) $10x + 3y + z$;

b) $A = 10x + 3y + z$ là 1 đa thức.

2. $A = 2(x^2 + y^2) - 3(x^2 - y^2) + 4xy$ là đa thức

$A = 2x^2 + 2y^2 - 3x^2 + 3y^2 + 4xy$

$A = -x^2 + 5y^2 + 4xy$

Bậc của đa thức $A = -x^2 + 5y^2 + 4xy$ là bậc 2.

3. $A = x^{2000}.x^{5} - x^{200}.x^{3} + 2x^{1990}x^{15} - 3x^{103}x^{100} + x^{10}x^{3} - 2x^{8}x^{5} + 2$

a) $A = x^{2005} - x^{203} + 2x^{2005} - 3x^{203} + x^{13} - 2x^{13} + 2$

$A = 3x^{2005} - 4x^{203} - x^{13} + 2$;

b) Đa thức $A = 3x^{2005} - 4x^{203} - x^{13} + 2$ bậc 2005;

c) $|x| = 1$, suy ra $x = \pm 1$

• Với $x = 1$ thì $A = 3.1^{2005} - 4.1^{203} - 1^{13} + 2 = 3 - 4 - 1 + 2 = 0$

• Với $x = -1$ thì $A = 3.(-1)^{2005} - 4(-1)^{203} - (-1)^{13} + 2 = -3 + 4 + 1 + 2 = 4$

Vậy $A = 4$. Khi $x = -1$ và $A = 0$ khi $x = 1$.

4. a) $P = 3x^2y - \{xyz - 2xyz + x^2z - 4x^2z + 3x^2y - 4xyz + 5x^2z + 3xyz\}$

$P = 3x^2y - xyz + 2xyz - x^2z + 4x^2z - 3x^2y + 4xyz - 5x^2z - 3xyz$

$P = -2x^2z + 2xyz$

$P = 2.(-1)^2.3 + 2.(-1).2.3 = -18.$

5. a) $P = 2a^{n+1} - 3a^{n} + 5a^{n+1} - 7a^{n} + 3a^{n+1} \ (n \in N)$

$= (2 + 5 + 3)a^{n+1} - (3 + 7)a^{n}$

$= 10a^{n+1} - 10a^{n}$

$= 10a^{n}.a - 10a^{n}$

$P = 10a^{n}(a - 1)$

b) $P = 0 \Leftrightarrow 10a^n(a - 1) = 0 \Leftrightarrow a^n = 0$ hoặc $a - 1 = 0$

* $a^n = 0$ khi $a = 0$, và $n \neq 0$

* $a - 1 = 0$ khi $a = 1$.

Vậy $P = 0$ khi $a = 0$ $(n \neq 0)$ hoặc $a = 1$.

6. $Q = 5x^{n+2} + 3x^n + 2x^{n+2} + 4x^n + x^{n+2} + x^n$

$Q = (5 + 2 + 1)x^{n+2} + (3 + 4 + 1)x^n$

$Q = 8x^n.x^2 + 8x^n$

$Q = 8x^n(x^2 + 1)$

Ta có $x^2 \geq 0\ \forall x \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 > 0\ \forall x$

Suy ra $Q = 0 \Leftrightarrow x^n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ n \neq 0. \end{cases}$

7. Theo giả thiết $f(0) \vdots 3$ mà $f(0) = c \Rightarrow c \vdots 3$.

Vậy $f(x) - c = ax^2 + bx$ cùng chia hết cho 3 (x nguyên)

Ta có $\begin{matrix} f(1) = a + b + c \\ f(-1) = a - b + c \end{matrix} \Rightarrow f(1) + f(-1) = 2a + 2c$

Mà $f(1) + f(-1)$ chia hết cho 3 suy ra $(2a + 2c)$ chia hết cho 3 mà 2c chia hết cho 3 $\Rightarrow$ 2a chia hết cho 3 $\Rightarrow$ a chia hết cho 3.

$f(1) - f(-1) = 2b$, ta có $f(1) - f(-1)$ chia hết ch 3 nên 2b chia hết cho 3 $\Rightarrow$ b chia hết cho 3.

§5. CỘNG, TRỪ ĐA THỨC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Cộng hai đa thức

Muốn cộng hai đa thức ta có thể làm như sau:

- Viết liên tiếp các số hạng của hai đa thức đó cùng với dấu của chúng
- Cộng (hoặc trừ) các đơn thức đồng dạng (nếu có). Trong quá trình thực hiện các phép toán cộng, trừ có thể sử dụng tính chất giao hoán, kết hợp.

2. Trừ hai đa thức

Muốn trừ hai đa thức ta có thể làm như sau:

- Viết các số hạng của đa thức thứ nhất cùng với dấu của chúng.
- Viết đa thức thứ hai trong dấu ngoặc và đặt dấu "–" trước dấu ngoặc.
- Bỏ dấu ngoặc sau đó cộng (hoặc trừ) các đơn thức đồng dạng (nếu có). Trong khi thực hiện phép tính "+" hoặc "–" ta có thể sử dụng tính chất giao hoán và kết hợp.

Ví dụ. Cho hai đa thức $M = 3x - 2y + b$ và $N = -2y + b$. Tìm tổng và hiệu hai đa thức này.

Giải. $M + N = 3x - 2y + b - 2y + b = 3x - 4y + 2b$

$M - N = 3x - 2y + b - (-2y + b) = 3x - 2y + b + 2y - b = 3x$

II. BÀI TẬP

1. Tính tổng và hiệu hai đa thức sau:

a) $a + b$ và $a - b$; b) $a - b$ và $a + b$;

c) $-a - b$ và $a - b$; d) $a - b$ và $b - a$.

2. Tìm M biết:

a) $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$;

b) $M - (4ab - 3b^2) = a^2 - 7ab + 8b^2$;

c) $(4c^4 - 7c^2 + 6) - M = 0$.

3. Đa thức nào cộng với đa thức $5x^2 - 3x - 9$ bằng

a) 0; b) 18; c) $2x - 3$; d) $x^2 - 5x + 6$.

4. Đơn giản biểu thức:

a) $(a^2 - 0,45a + 1,2) + (0,8a^2 - 1,2a) - (1,6a^2 - 2a)$;

b) $(y^2 - 1,75y - 3,2) - (0,3y^2 + 4) - (2y - 7,2)$;

c) $6xy - 2x^2 - (3xy + 4x^2 + 1) - (-xy - 2x^2 - 1)$;

d) $-(2ab^2 - ab + b) + 3ab^2 - 4b - (5ab - ab^2)$.

5. Chứng minh rằng hiệu của hai đa thức $0,7x^4 + 0,2x^2 - 5$ và $-0,3x^4 + \frac{1}{5}x^2 - 8$ luôn luôn dương với mọi giá trị của x.

6. Học sinh lớp 7A làm bài tập:

"Tính giá trị của biểu thức

$(7a^3 - 6a^2b + 5ab^2) + (5a^3 + 7a^2b + 3ab^2) - (10a^3 + a^2b + 8ab^2)$. Với $a = -0,25$".

Một học sinh phát biểu rằng bài toán không có lời giải. Đúng hay sai?

7. Đa thức nào khi cộng với đa thức $x^2 + y^2 - 2xy + 1$, để kết quả nhận được đa thức:

a) Không chứa biến x;

b) Không chứa biến y.

8. Cho các đa thức.

$$P = 2a^2 - 5ab + b^2 - 3b^3 \text{ và } Q = 2a^2 + ab - 3b^3 + 2b^2$$

Tính: $-(Q - P) - \{Q - [P - (Q - P)]\}$

9. Cho đa thức:

$$A = 5y^7 + y^5 - 6y^7 - 2y^5 + 2y^5y^2 + 3y^2y^3 - yy^4$$

và $$B = 4yy^6 - y^4y - 5y^3y^4 + 2y^2y^3 - 3y^2y^5 - 5y^5$$

a) Với giá trị nào của y thì $A + B = 0$;

b) Chứng tỏ rằng nếu $y \in Z$ thì $A - B$ chia hết cho 5.

10. Tìm các số x, y, z, t thoả mãn các điều kiện sau:

$$x + y + z = 0;\ y + z + t = 1;\ z + t + x = 2 \text{ và } t + x + y = 3.$$

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) $(a + b) + (a - b) = a + b + a - b = 2a$;

$(a + b) - (a - b) = a + b - a + b = 2b$;

b) $(a - b) + (a + b) = (a + b) + (a - b) = 2a$;

$(a - b) - (a + b) = -[(a + b) - (a - b)] = -2b$;

c) $(-a - b) + (a - b) = (a - b) - (a + b) = -2b$;

$(-a - b) - (a - b) = -[(a + b) + (a - b)] = -2a$;

d) $(a - b) + (b - a) = 0$;

$(a - b) - (b - a) = (a - b) + (a - b) = 2a - 2b$.

2. a) $M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - 5x^2 + 2xy$

$= x^2 + 11xy$;

b) $M = a^2 - 3ab + 3b^2$;

c) $M = 4c^4 - 7c^2 + 6$.

3. a) $9 + 3x - 5x^2$; b) $-5x^2 + 3x + 27$;

c) Gọi đa thức phải tìm là M, thì ta có:

$M + 5x^2 - 3x - 9 = 2x - 3 \Rightarrow M = 2x - 3 - (5x^2 - 3x - 9)$

$M = -5x^2 + 5x + 6$;

d) $-4x^2 - 2x + 15$.

4. a) $a^2 - 0{,}45a + 1{,}2 + 0{,}8a^2 - 1{,}2a - 1{,}6a^2 + 2a$

$= 0{,}2a^2 + 0{,}35a + 1{,}2$;

ĐS: b) $0{,}7y^2 - 3{,}75y$; c) $4xy + 4x^2$; d) $2ab^2 - 5ab - 5b$.

5. $0{,}7x^4 + 0{,}2x^2 - 5 - (-0{,}3x^4 + 0{,}2x^2 - 8) = x^4 + 3$.

Do $x^4 \geq 0\ \forall x$ nên $x^4 + 3 > 0\ \forall\ x$

6. $(7a^3 - 6a^2b + 5ab^2) + (5a^3 + 7a^2b + 3ab^2) - (10a^3 + a^2b + 8ab^2)$

$= 7a^3 - 6a^2b + 5ab^2 + 5a^3 + 7a^2b + 3ab^2 - 10a^3 - a^2b - 8ab^2 = 2a^3$

Với $a = -0{,}25 = -\frac{1}{4}$ nên $2a^3 = 2.\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = 2.\left(-\frac{1}{64}\right) = -\frac{1}{32}$;

7. a) Chẳng hạn đa thức $M_1 = -x^2 + 2xy$, $M_2 = y^2 - x^2 + 2xy$

$M_3 = y^2 - x^2 + 2xy + 3...$

b) Chẳng hạn đa thức $N_1 = 2xy - y^2$, $N_2 = 2xy - y^2 + 1$

$N_3 = x^2 + 2xy - y^2 + 3...$

Tóm lại có vô số đa thức M, đa thức N thoả mãn đề bài

8. $P = 2a^2 - 5ab + b^2 - 3b^3$; $Q = 2a^2 + ab - 3b^3 + 2b^2$

$-(Q - P) - \{Q - [P - (Q - P)]\}$

$= -Q + P - \{Q - [P - Q + P]\}$

$= -Q + P - \{Q - P + Q - P\}$

$= -Q + P - 2Q + 2P$

$= 3P - 3Q$

$= 3(P - Q) = 3[(2a^2 - 5ab + b^2 - 3b^3) - (2a^2 + ab - 3b^3 + 2b^2)]$

$= 3[2a^2 - 5ab + b^2 - 3b^3 - 2a^2 - ab + 3b^3 - 2b^2]$

$= 3.(-6ab - b^2)$

$= -3.b(6a + b)$

Vậy: $-(Q - P) - \{Q - [P - (Q - P)]\} = -3b(6a + b)$

9. $A = 5y^7 + y^5 - 6y^7 - 2y^5 + 2y^5y^2 + 3y^2y^3 - yy^4$

$= 5y^7 + y^5 - 6y^7 - 2y^5 + 2y^7 + 3y^5 - y^5$

$= y^7 + y^5$

$B = 4yy^6 - y^4y - 5y^3y^4 + 2y^2y^3 - 3y^2y^5 - 5y^5$

$= 4y^7 - y^5 - 5y^7 + 2y^5 - 3y^7 - 5y^5$

$= -4y^7 - 4y^5$

a) $A + B = y^7 + y^5 - 4y^7 - 4y^5 = -3y^7 - 3y^5 = -3y^5(y^2 + 1)$

Vì $y^2 \geq 0$ nên $y^2 + 1 \geq 1$. Suy ra $A + B = 0$ khi và chỉ khi $-3y^5 = 0$, do đó $y = 0$. Vậy nếu $y = 0$ thì $A + B = 0$

b) $A - B = (y^7 + y^5) - (-4y^7 - 4y^5)$

$= y^7 + y^5 + 4y^7 + 4y^5$

$= 5.(y^7 + y^5)$

Vì $5 \vdots 5$ nên $5.(y^7 + y^5) \vdots 5$ $(y \in \mathbb{Z})$

Vậy nếu $y \in \mathbb{Z}$ thì $(A - B) \vdots 5$.

10.

$$
\begin{array}{rl}
 & x + y + z \phantom{{}+t} = 0 \quad (1) \\
+ & \phantom{x+{}} y + z + t = 1 \quad (2) \\
 & x \phantom{{}+y} + z + t = 2 \quad (3) \\
 & x + y \phantom{{}+z} + t = 3 \quad (4) \\
\hline
 & 3(x + y + z + t) = 6 \\
 & x + y + z + t = 2 \quad (5)
\end{array}
$$

Từ (1) và (5) ta có: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z + t = 2 \end{cases} \Rightarrow t = 2$

Thay (2) vào (5) ta có: $x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Thay (4) vào (5) ta có: $z + 3 = 2 \Leftrightarrow z = -1$

Thay (3) vào (5) ta có: $y + 2 = 2 \Leftrightarrow y = 0$

Vậy ta có $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \\ t = 2 \end{cases}$

§6. ĐA THỨC MỘT BIẾN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đa thức một biến

• Đa thức một biến là đa thức của cùng một biến. Chẳng hạn, đa thức

$$A = 5x^2 + 6x - 11 \text{ (biến x)}, B = 3y - 2 \text{ (biến y)}$$

• Mỗi số coi như là một đa thức một biến

• Để chỉ A là đa thức biến x thì kí hiệu A(x) B là đa thức biến y thì kí hiệu B(y).

Giá trị của đa thức $A(x) = 5x^2 + 6x - 11$ tại x = 1 kí hiệu là

$$A(1) = 5.1^2 + 6.1 - 11 = 0$$

Vậy A(0) = −11.

• Bậc của đa thức một biến (khác đa thức 0, đã thu gọn) là số mũ lớn nhất của biến trong đa thức đó.

Chẳng hạn đa thức A(x) ở trên có bậc 2, đa thức B(y) có bậc 1 (còn gọi là bậc nhất).

2. Sắp xếp một đa thức

Người ta thường sắp xếp các hạng tử của đa thức một biến theo luỹ thừa tăng hoặc giảm của biến.

Chẳng hạn, cho đa thức $P(x) = 4x^3 - 12x^4 + 5x - 3$

* Khi sắp xếp P(x) theo luỹ thừa giảm của biến ta có:

$$P(x) = -12x^4 + 4x^3 + 5x - 3$$

* Khi sắp xếp P(x) theo luỹ thừa tăng của biến, ta có:

$$P(x) = -3 + 5x + 4x^3 - 12x^4.$$

3. Hệ số. Trong đa thức P(x) đã cho ở trên thì −12 là hệ số của luỹ thừa bậc 4 (bậc của đa thức) nên −12 gọi là hệ số cao nhất

4. Hai đa thức bằng nhau: Hai đa thức f(x) và g(x) bằng nhau ⇔ chúng có luỹ thừa cùng bậc bằng nhau.

II. BÀI TẬP

1. Thu gọn biểu thức thành một đa thức và sắp xếp theo luỹ thừa giảm của biến.

a) $8x^2 + (4,5 - x^2) - 2,5x^3 - 5,4x$;

b) $(7a^3 - 6a^2 + 5a) + (5a^3 + 8a^2 + 4a) - (10a^3 + a^2 + 8a)$.

2. Cho đa thức:

$$f(x) = x^{1800}x^{200} + 4x^{101}x^{99} + 3x^{15}x^{5} + 2x^{2} + 2005$$

a) Thu gọn f(x);

b) Xác định bậc và hệ số cao nhất của f(x);

c) So sánh f(1) và f(−1);

d) Có hay không giá trị của x để f(x) = 0?

3. Cho đa thức:

$g(x) = -8x^{n+1}x + 12x^{n}x + 2x^{n}x^{3} - 3x^{2}x^{n} + 9x^{n+3}x - 3x^{3}x^{n} + 4x^{n}x^{2} - 10x^{n+3}x$
(với n là số tự nhiên lẻ)

a) Thu gọn và viết đa thức g(x) theo luỹ thừa giảm dần của biến;

b) Xác định bậc và hệ số cao nhất của g(x);

c) Tính giá trị của g(x) biết $|x| = 1$.

4. Cho các đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ và $g(x) = x(x + 2) - (x + 2)$. Xác định a, b, c để f(x) = g(x).

5. Tính a, b, c nếu đa thức $x^3 + 6x^2 + ax + b$ bằng đa thức $x^3 + 3cx^2 + 3c^2x + c^3$

6. Các số p, q phải như thế nào để:

a) Đa thức $P(x) = x^2 + px + q$ có giá trị là số chẵn, với mọi $x \in \mathbb{Z}$

b) Đa thức $Q(x) = x^3 + px + q$ có giá trị là bội của 3 với mọi $x \in \mathbb{Z}$

(Trích đề thi vô địch Rumani 1962)

7. Nếu a + b = 7; b + c = 9; a + c = 8 thì abc là:

A. 60; B. 63; C. 64; D. 27; E. 120.

8. Cho $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ trong đó a, b, c, d là các hằng số. Giả sử P(1) = 10; P(2) = 20; P(3) = 30. Hãy tính: $\dfrac{P(12) + P(-8)}{10}$.

(Trích đề thi HSG Toán ở Mĩ)

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) $8x^2 + 4{,}5 - x^2 - 2{,}5x^3 - 5{,}4x = -2{,}5x^3 + 7x^2 - 5{,}4x + 4{,}5$;

b) $2a^3 + a^2 + a$.

2. $f(x) = x^{1800}.x^{200} + 4x^{101}x^{99} + 3x^{15}x^{5} + 2x^{2} + 2005$

a) $f(x) = x^{2000} + 4x^{200} + 3x^{20} + 2x^{2} + 2005$;

b) Bậc của f(x) là 2000, hệ số cao nhất là 1;

c) $f(1) = 1^{2000} + 4.1^{200} + 3.1^{20} + 2.1^2 + 2005$

$= 1 + 4 + 3 + 2 + 2005$

$f(1) = 2015$,

$f(-1) = (-1)^{2000} + 4(-1)^{200} + 3.(-1)^{20} + 2(-1)^2 + 2005$

$= 1 + 4.1 + 3.1 + 2.1 + 2005 = 2015.$

Vậy $f(1) = f(-1) = 2015.$

d) $f(x) = x^{2000} + 4.x^{200} + 3x^{20} + 2x^2 + 2005$

Ta có $x^{2000} \geq 0$ với $\forall x$

$4.x^{200} \geq 0$ với $\forall x$

+ $3x^{20} \geq 0$ với $\forall x$

$2x^2 \geq 0$ với $\forall n$

$2005 = 2005$

$f(x) \geq 2005$ với $\forall x$

Vậy không có giá trị của x để $f(x) = 0$

3. $g(x) = -8x^{n-1}x + 12x^n x + 2x^n x^3 - 3x^2 x^n + 9xx^{n+3} - 3x^3 x^n$
$+ 4x^n x^2 - 10x^{n+3}x$ (với n là số tự nhiên lẻ)

a) $g(x) = -8x^n + 12x^{n+1} + 2x^{n+3} - 3x^{n+2} + 9x^{n+4} - 3x^{n+3} + 4x^{n+2} - 10x^{n+4}$

$g(x) = -x^{n+4} - x^{n+3} + x^{n+2} + 12x^{n+1} - 8x^n$;

b) Bậc của g(x) là n + 4 và hệ số cao nhất là (–1);

c) $|x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

• $g(1) = -1^{n+4} - 1^{n+3} + 1^{n+2} + 12.1^{n+1} - 8.1^n$ (n là số tự nhiên lẻ)

$= -1 - 1 + 1 + 12 - 8$

$g(1) = 3$

Vậy với x = 1 thì g(1) = 3.

• $g(-1) = -(-1)^{n+4} - (-1)^{n+3} + (-1)^{n+2} + 12(-1)^{n+1} - 8.(-1)^n$

Vì n là số tự nhiên lẻ nên n + 4; n + 2 là số tự nhiên lẻ, còn n + 3; n + 1 là số tự nhiên chẵn.

$g(-1) = -(-1) - 1 + (-1) + 12.1 - 8(-1)$

$g(-1) = 1 - 1 - 1 + 12 + 8 = 19$

Vậy với x = –1 thì g(–1) = 19.

4. $g(x) = x(x + 2) - (x + 2) = x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x - 2$

$f(x) = ax^2 + bx + c.$

Theo đề bài f(x) = g(x) nên $ax^2 + bx + c = x^2 + x - 2$

Suy ra a = 1; b = 1; c = –2

5. Ta đã biết $x^3 + 6x^2 + ax + b = x^3 + 3cx^2 + 3c^2x + c^3 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 6 = 3c \\ a = 3c^2 \\ b = c^3 \end{cases}$$ suy ra $c = 2$, $a = 12$, $b = 8$

6. a) Ta có: $P(0) = q$ mà $P(0)$ chẵn $\Rightarrow$ q chẵn

$P(1) = 1 + p + q$ chẵn $\Rightarrow$ p lẻ

Vậy với p lẻ và q chẵn thì $P(x)$ là số chẵn với mọi $x \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có $Q(0) = q$ mà $Q(0)$ là bội của 3 $\Rightarrow$ q là bội của 3

$Q(1) = 1 + p + q$ là bội của 3 mà q là bội của 3 nên $1 + p$ là bội của 3

Với các điều kiện đó của q và p thì $Q(3x)$ và $Q(3x \pm 1)$ luôn chia hết cho 3 (mọi số nguyên đều viết được dưới dạng $3x$ hoặc $3x \pm 1$).

7. $a + b = 7$, $b + c = 9$, $a + c = 8 \Rightarrow 2(a + b + c) = 24 \Rightarrow a + b + c = 12$

Vậy $c = 12 - (a + b) = 12 - 7 = 5$, suy ra $b = 4$, $a = 3$

Do đó $abc = 3.4.5 = 60$. Đáp án A đúng.

8. Đặt $Q(x) = P(x) - 10x$. Khi đó $Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0$.

Vì vậy $Q(x)$ chia hết cho $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$. $Q(x)$ là đa thức bậc 4 (do $P(x)$ là đa thức bậc 4), nên $Q(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - r)$ và $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - r) + 10x$.

Ta tính $\dfrac{P(12) + P(-8)}{10}$ và nghĩ rằng sẽ nhận được một biểu thức của r, nhưng ta thấy rằng r bị triệt tiêu. Kết quả

$P(12) = 12.11.10.9 + 120$

$P(-8) = (-9).(-10)(-11).(-8) - 80$

Vậy $\dfrac{P(12) + P(-8)}{10} = 1984$.

§7. CỘNG, TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Cộng trừ đa thức một biến như cộng trừ đa thức ở §4.

2. Sắp xếp các đa thức cùng theo luỹ thừa giảm (hoặc tăng) của biến và đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột rồi đặt phép tính như cộng và trừ các số.

II. BÀI TẬP

1. Cho các đa thức: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ và $g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 9$
Tính: a) $f(x) + g(x)$; b) $f(x) - g(x)$; c) $g(x) - f(x)$.

2. Cho các đa thức:
$f(x) = x^{100} + x^{99} + x^{98} + ... + x^2 + x - 10$ và
$g(x) = x^{99} + x^{97} + x^{95} + ... + x^3 + x$
a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x) - g(x)$;
b) Tìm giá trị lớn nhất của $g(x) - f(x)$.

3. Tìm x biết:
a) $2(x^2 + 3x - 2) - 2(x^2 - x + 1) + 3(2x^2 - 3x + 1) - 2(3x^2 + x - 1) = 0$;
b) $3(5x^2 - 2x) + 5(-3x^2 + x - 1) + 3(4x^2 - 5x) - 4(3x^2 - x + 1) = 7$.

4. Cho đa thức: $f(x) = 8x^{n+3} + 2x^{n+2} - x^{n+1} + 3x^n$

$g(x) = -8x^{n+3} - 2x^{n+2} + x^{n+1} + 2x^n$ $(x \in \mathbb{N})$

Với giá trị nào của x và n thì $f(x) + g(x) = 5$.

5. Cho các đa thức $M = x^3 + 4x^2 - 5x - 1$; $N = -\frac{1}{2}x^3 - x^2 - 7x - 1$

Tính $3M - \{M - [M - (M - N)] + 3N\}$.

6. Cho các đa thức:
$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{100}$
$g(x) = x^{100} + x^{99} + x^{98} + ... + x^2$
Tính giá trị $f(x) - g(x)$ tại $x = -2$

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$; $g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 9$

a)
$$\begin{array}{r} f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5 \\ + \quad g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 9 \\ \hline f(x) + g(x) = 2x^3 + 0 + 6x - 14 \end{array}$$
Vậy $f(x) + g(x) = 2x^3 + 6x - 14$;

b) $f(x) - g(x) = f(x) + [-g(x)]$

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5 \\ -g(x) = -x^3 - 2x^2 - 3x + 9 \end{cases} \\ \hline f(x) - g(x) = 0 - 4x^2 + 0 + 4 \end{array}$$
Vậy $f(x) - g(x) = -4x^2 + 4$

c) $g(x) - f(x) = -[f(x) - g(x)] = -(-4x^2 + 4) = 4x^2 - 4$

Vậy $g(x) - f(x) = 4x^2 - 4$.

2. $f(x) = x^{100} + x^{99} + x^{98} + ... + x^2 + x - 10$

$g(x) = x^{99} + x^{97} + x^{95} + ... + x^3 + x$

a) $+\begin{cases} f(x) = x^{100} + x^{99} + x^{98} + x^{97} + ... + x^3 + x^2 + x - 10 \\ -g(x) = \quad -x^{99} \quad -x^{97} \quad -x^3 \quad -x \end{cases}$

$f(x) + [-g(x)] = x^{100} + x^{98} + x^{96} + ... + x^2 - 10$

$f(x) - g(x) = x^{100} + x^{98} + x^{96} + ... + x^2 - 10$

$+\begin{cases} x^{100} \geq 0\ \forall x & \text{Dấu "=" xảy ra khi } x = 0 \\ x^{98} \geq 0\ \forall x & \text{Dấu "=" xảy ra khi } x = 0 \\ x^{98} \geq 0\ \forall x & \text{Dấu "=" xảy ra khi } x = 0 \\ .... & \\ x^2 \geq 0\ \forall x & \text{Dấu "=" xảy ra khi } x = 0 \\ -10 = -10 & \end{cases}$

$f(x) - g(x) \geq -10$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x) - g(x) = -10$ khi $x = 0$;

b) $g(x) - f(x) = -[f(x) - g(x)] = -x^{100} - x^{98} - ... - x^2 + 10$

$g(x) - f(x) = -[x^{100} + x^{98} + x^{96} + ... + x^2] + 10$

Theo câu a) thì $x^{100} + x^{98} + x^{96} + ... + x^2 \geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$.

Suy ra: $-[x^{100} + x^{98} + x^{96} + ... + x^2] \leq 0$

Do đó $g(x) - f(x) = -[x^{100} + x^{98} + x^{96} + ... + x^2] + 10 \leq 10$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$.

Vậy giá trị lớn nhất của $g(x) - f(x) = 10$ khi $x = 0$.

3. Tìm x:

a) $2(x^2 + 3x - 2) - 2(x^2 - x + 1) + 3(2x^2 - 3x + 1) - 2(3x^2 + x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 4 - 2x^2 + 2x - 2 + 6x^2 - 9x + 3 - 6x^2 - 2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow -3x - 1 = 0 \Leftrightarrow -3x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$;

b) $3(5x^2 - 2x) + 5(-3x^2 + x - 1) + 3(4x^2 - 5x) - 4(3x^2 - x - 1) = 7$

$\Leftrightarrow 15x^2 - 6x - 15x^2 + 5x - 5 + 12x^2 - 15x - 12x^2 + 4x - 4 = 7$

$\Leftrightarrow -12x - 9 = 7 \Leftrightarrow -12x = 9 + 7 \Leftrightarrow x = 16 : (-12) = -1\frac{1}{3}$

Vậy $x = -1\frac{1}{3}$.

4.

$$+\begin{cases} f(x) = 8x^{n+3} + 2x^{n+2} - x^{n+1} + 3x^n \\ g(x) = -8x^{n+3} - 2x^{n+2} + x^{n+1} + 2x^n \end{cases}$$

$$f(x) + g(x) = 0 + 0 + 0 + 5x^n$$

$f(x) + g(x) = 5x^n$ (1)

mà $f(x) + g(x) = 5$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $5x^n = 5 \Leftrightarrow x^n = 1$

* TH_1: nếu $n = 0$ và $x \neq 0$ thì $x^n = x^o = 1$

* TH_2: nếu $n \in \mathbf{N}^*$ và $x = 1$ thì $x^n = 1^n = 1$

* TH_3: nếu $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}^*$ và $x = -1$ thì $x^n = (-1)^{2k} = 1$

Vậy $\begin{cases} x \neq 0 \\ n = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1 \\ n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$; $\begin{cases} x = -1 \\ n = 2k, k \in \mathbf{N}^* \end{cases}$

5. Đặt $P = 3M - \{M - [M - (M - N)] + 3N\}$

$= 3M - \{M - [M - M + N] + 3N\}$

$= 3M - \{M - N + 3N\}$

$= 3M - \{M + 2N\}$

$= 3M - M - 2N = 2M - 2N$

$$-\begin{array}{l} 2x^3 + 8x^2 - 10x - 2 \\ -x^3 - 2x^2 - 14x - 2 \end{array}$$

$$P = 3x^3 + 10x^2 + 4x$$

6.

$$-\begin{array}{l} f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{98} + x^{99} + x^{100} \\ g(x) = \qquad\quad x^2 + \ldots + x^{98} + x^{99} + x^{100} \end{array}$$

$$f(x) - g(x) = 1 + x$$

Với $x = -2 \Rightarrow f(x) - g(x) = 1 - 2 = -1$.

§8. NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Nghiệm của đa thức một biến

Nếu tại $x = a$, đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 0 thì nói a (hoặc $x = a$) là nghiệm của đa thức $P(x)$.

2. Chú ý

• Một đa thức (khác đa thức 0) có thể có một nghiệm, hai nghiệm... hoặc vô nghiệm.

• Người ta đã chứng minh được rằng số nghiệm của một đa thức (khác đa thức không) không vượt quá số bậc của nó. Đa thức bậc nhất chỉ có một nghiệm, đa thức bậc ba có không quá 3 nghiệm.

Mở rộng: Để tìm nghiệm một đa thức một cách dễ dàng hơn ta thừa nhận định lí sau:

Đa thức $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$

với hệ số nguyên có nghiệm hữu tỉ $x = \frac{p}{q}$ thì điều kiện cần và đủ là p chia hết số hạng tự do a_n còn q chia hết a_0.

Ví dụ. Tìm nghiệm của đa thức $P(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 2$. Giả sử P(x) có nghiệm hữu tỉ $\frac{p}{q}$ thì $-2 \vdots p$ và $2 \vdots q$

Nên có thể $p = -1; 1; -2; 2$ và q có thể là 1; 2.

Do đó nghiệm của đa thức P(x) có thể là: $\pm 1; \pm 2; \pm\frac{1}{2}$

$P(\pm 1) \neq 0$, $P(\pm 2) \neq 0$, $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $P\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$

Vậy đa thức P(x) có nghiệm là $x = -\frac{1}{2}$.

II. BÀI TẬP

1. Chứng tỏ rằng đa thức:

a) $f(x) = x^{100} + x^{75} + x^{50} + x^{25} + x + 1$ có nghiệm là $x = -1$.

g) $g(x) = x^{200} - x^{150} + x^{100} - x^{50} + x^{10} - 1$ có nghiệm là $x = 1$.

2. Cho hai đa thức:

$f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$ và $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

Trong các số 0; −1, 1; −2; 2; thì số nào là nghiệm chung của hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$?

3. Xác định a, b, c để nghiệm của đa thức $f(x) = x(x - 1)(x + 2)$ cũng là nghiệm của đa thức $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

4. Cho đa thức:

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

Xác định a và b biết rằng đa thức f(x) có hai nghiệm là

$$x_1 = 2 \text{ và } x_2 = 3.$$

5. Chứng tỏ rằng:

a) $f(x) = a(x - 5)^2 + b$ vô nghiệm nếu a; b cùng dấu và khác số 0;

b) $g(x) = 2(x - 3)^2 + 5(x + 2)^2$ vô nghiệm;

c) $h(x) = (x + 1)^4 + 2(x + 1)^2 + 3$ vô nghiệm.

6. Tìm nghiệm của đa thức sau:

a) $P_2(x) = 2x^2 + 3x + 1$;

b) $P_3(x) = (x^2 - 3x + 2)(x + 1)$.

7. Cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với P(0) và P(1) là số lẻ. Chứng minh rằng P(x) không thể có nghiệm là số nguyên.

(Trích đề thi Vô địch Toán Matxcơva - 1980)

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) $f(x) = x^{100} + x^{75} + x^{50} + x^{25} + x + 1$

$f(-1) = (-1)^{100} + (-1)^{75} + (-1)^{50} + (-1)^{25} + (-1) + 1$

$= 1 - 1 + 1 - 1 - 1 + 1 = 0.$

Vậy $x = -1$ là nghiệm của f(x).

b) $g(x) = x^{200} - x^{150} + x^{100} - x^{50} + x^{10} - 1$

$g(1) = 1^{200} - 1^{150} + 1^{100} - 1^{50} + 1^{10} - 1$

$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 = 0.$

Vậy $x = 1$ là nghiệm của g(x).

2. $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$. Ta có $x = 0$ không là nghiệm vì $f(0) = 2$.
$f(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 - 3(-1)^2 - (-1) + 2 = 1 - 1 - 3 + 1 + 2 = 0$. Vậy $x = -1$ là nghiệm của f(x).
$f(1) = 1^4 + 1^3 - 3.1^2 - 1 + 2 = 1 + 1 - 3 - 1 + 2 = 0$. Vậy $x = 1$ là nghiệm của f(x).
$f(-2) = (-2)^4 + (-2)^3 - 3.(-2)^2 + 2 + 2 = 16 - 8 - 12 + 2 + 2 = 0$
Vậy $x = -2$ là nghiệm của f(x).
$f(2) = 2^4 + 2^3 - 3.2^2 - 2 + 2 = 16 + 8 - 12 - 2 + 2 = 12$
Vậy $x = 2$ không phải là nghiệm của f(x).
Đa thức g(x) có 3 nghiệm là -1; 1; -2 (1);
• $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.
$g(-1) = (-1)^4 - 5(-1)^2 + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$. Vậy $x = -1$ là nghiệm của g(x).
$g(1) = x^4 - 5x^2 + 4 = 1^4 - 5.1^2 + 4 = 0$. Vậy $x = 1$ là nghiệm của g(x).
$g(-2) = (-2)^4 - 5(-2)^2 + 4 = 16 - 20 + 4 = 0$. Vậy $x = -2$ là nghiệm của g(x)
Đa thức g(x) có 3 nghiệm là -1; 1; -2 (2)
Từ (1) và (2) suy ra nghiệm chung của hai đa thức f(x) và g(x) là -1; 1 và -2.

3. $f(x) = x(x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

f(x) có 3 nghiệm là 0; 1, -2. Xét đa thức $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
• $x = 0$ là nghiệm của g(x) khi và chỉ khi $g(0) = 0$ mà $g(0) = c$.
Vậy $c = 0$. (1)
• $x = 1$ là nghiệm của g(x) khi và chỉ khi $g(1) = 1 + a + b + c = 0$.
Vậy $a + b = -1$ (2)
• $x = -2$ là nghiệm của g(x) khi và chỉ khi $g(-2) = (-2)^3 + a.(-2)^2 + b(-2) + c = 0 \Leftrightarrow 4a - 2b = 8 \Leftrightarrow 2a - b = 4$ (3).

Từ (2) và (3) ta có $+\begin{cases} a + b = -1 \\ 2a - b = 4 \end{cases}$
$\overline{\quad 3a = 3 \quad}$

$\Leftrightarrow a = 1$. Thay vào (2) suy ra $b = -2$.

• Vậy nếu $a = 1$; $b = -2$; $c = 0$ thì đa thức $f(x) = x(x-1)(x+2)$ có các nghiệm cũng là nghiệm của đa thức $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 + x^2 - 2x$

4. $f(x) = x^2 + ax + b$

Đa thức f(x) có nghiệm x = 2 nên f(2) = 0, tức là:

$$2^2 + 2a + b = 0 \Leftrightarrow 2a + b = -4 \qquad (1)$$

Đa thức f(x) có nghiệm x = 3 nên f(3) = 0, ta có:

$$3^2 + 3a + b = 0 \Leftrightarrow 3a + b = -9 \qquad (2)$$

$$-\begin{cases} 3a + b = -9 \\ 2a + b = -4 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad a = -5 \qquad}$$

Thay a = −5 vào 2a + b = −4 được −10 + b = −4; b = 6. **Vậy a = −5** và b = 6 ta có đa thức:

$$f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

5. a) $f(x) = a(x-5)^2 + b = a\left[(x-5)^2 + \frac{b}{a}\right]$. Ta có $(x-5)^2 \geq 0\ \forall x$, do đó:

Nếu a, b cùng dấu và khác số 0 thì $\frac{b}{a} > 0$, nên $(x-5)^2 + \frac{b}{a} > 0$.

Nếu $a > 0$ thì $f(x) = a\left[(x-5)^2 + \frac{b}{a}\right] > 0$

Nếu $a < 0$ thì $f(x) = a\left[(x-5)^2 + \frac{b}{a}\right] < 0$.

Như vậy không có x để f(x) = 0. Do đó đa thức f(x) vô **nghiệm**;

b) $g(x) = 2(x-3)^2 + 5(x+2)^2$.

• Vì $2(x-3)^2 \geq 0\ \forall x$ và $5(x+2)^2 \geq 0\ \forall x$ nên $2(x-3)^2 + 5(x+2)^2 = 0$ khi và chỉ khi cả hai số hạng đồng thời bằng 0.

• $2(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ mà với x = 3 thì $5(x+2)^2 = 5(3+2)^2 = 125 \neq 0$

$5(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ mà với x = −2 thì $2(x-3)^2 = 2(-2-3)^2 = 50 \neq 0$

Vậy không có giá trị nào của x để g(x) = 0, do đó g(x) **vô nghiệm**;

c) $h(x) = (x+1)^4 + 2(x+1)^2 + 3$

Vì $(x+1)^4 \geq 0\ \forall x$; $2(x+1)^2 \geq 0\ \forall x$ nên $h(x) = (x+1)^4 + 2(x+1)^2 + 3 \geq 3$.

Vậy không có giá trị của x để h(x) = 0. Do đó h(x) vô nghiệm.

6. a) Nếu $P_2(x)$ có nghiệm hữu tỉ $\frac{p}{q}$ thì p chia hết 1 $\Rightarrow p = \pm 1$ và q chia hết 2 nên $q = \pm 1, \pm 2$. Vậy $\frac{p}{q} = \pm 1$, $\frac{p}{q} = \pm\frac{1}{2}$

Vậy $P_2(x)$ có hai nghiệm $x = -1$, $x = -\frac{1}{2}$

$P_2(1) \neq 0$, $P_2(-1) = 0$, $P\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$;

b) Tương tự như a) $P_3(x)$ có 3 nghiệm $x = 1$, $x = 2$, $x = -1$.

7. $P(0) = d$ là số lẻ, $P(1) = a + b + c + d$ là số lẻ.

Giả sử có $x_0 \in \mathbf{Z}$ mà $P(x_0) = 0$

x_0 là số chẵn $\Rightarrow P(x_0) - d = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0$ chẵn

$$P(x_0) - d = P(x_0) - P(0) = -P(0) \text{ chẵn}$$

x_0 là số lẻ $\Rightarrow P(x_0) - P(1) = a(x_0^3 - 1) + b(x_0^2 - 1) + c(x_0 - 1)$ cũng là số chẵn do $x_0^3 - 1$, $x_0^2 - 1$, $x_0 - 1$ là số chẵn $\Rightarrow P(1)$ chẵn trái với giả thiết.

Vậy $P(x)$ không có nghiệm là số nguyên.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG IV

1. Tính giá trị của biểu thức:

a) $A = \frac{2x - 5y}{x - 3y} - \frac{4x + y}{8x - 2y}$ biết $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$;

b) $B = \frac{3x - y}{2x + 7} + \frac{3y - x}{2y - 7}$ biết $x - y = 7$ $(x \neq -3{,}5;\ y \neq 3{,}5)$.

2. Kiểm tra rằng:

a) Đa thức $f(x) = 3x^2 - 9x + 6$ có hai nghiệm $x = 1$, $x = 2$;

b) Đa thức $g(x) = x^5 + x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 2x + 2$ có nghiệm $x = -1$.

3. Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có $a + b + c + d = 0$ hay $-a + b - c + d = 0$. Chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất một nghiệm.

4. a) Tìm các số x và y thoả mãn các điều kiện:

$xy^2 = 8$ và $x^2y = -64$;

b) Xét các đơn thức $A = 3x^2y$; $B = 2xy^2$; $C = 5xy$. Chứng tỏ rằng nếu $3x + 2y = 5$ thì $A + B - C = 0$.

5. Cho các đơn thức: $f(x) = 5x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 2x - 5$; $g(x) = 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 - x + 7$ và $h(x) = 3x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

a) Tính $A(x) = f(x) + g(x) - h(x)$.

b) Trong các số -1; $-\frac{1}{2}$; 0; $\frac{1}{2}$; 1 thì số nào là nghiệm của đa thức $A(x)$?

6. Chứng minh:

a) Đa thức $f(x) = x^3 - x + 5$ không có nghiệm nguyên;

b) Đa thức $P(x) = x^3 + 5x^2 + 2x + 3$ không có nghiệm nguyên;

c) Đa thức $P_8(x) = -x^8 + x^5 - x^2 + x - 1$ không có nghiệm.

7. Chứng minh rằng đa thức $P(x) = x^5 - 1$ có một nghiệm duy nhất $x = 1$.

8. Hãy tìm một tập hợp M gồm 7 số tự nhiên liên tiếp sao cho có một đa thức P(x) bậc 5 thoả mãn các điều kiện sau đây:

a) Tất cả các hệ số của P(x) đều là số nguyên;

b) Với năm số $k \in M$ (kể cả số lớn nhất và số nhỏ nhất) ta đều có $P(k) = k$;

c) Có một số $k \in M$ sao cho $P(k) = 0$.

(Trích đề thi vô địch Anh – 1980)

9. Số tự nhiên a nhỏ nhất là bao nhiêu để tam thức bậc hai ($f(x) = ax^2 + bx + c$) với a, b, c nguyên có hai nghiệm dương khác nhau nhỏ hơn đơn vị.

(Vô địch Toán Kiép – 1969)

10. Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên a, b, c, d sao cho giá trị của đa thức $ax^3 + bx^2 + cx + d$ bằng 1 với $x = 19$ và bằng 2 với $x = 62$.

(Vô địch Toán Matscova – 1962)

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) $A = \frac{2x - 5y}{x - 3y} - \frac{4x + y}{8x - 2y}$ biết $\frac{x}{3} = \frac{y}{7}$

$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3y}{4}$ Thay vào A ta có:

$$A = \frac{2.\frac{3y}{4} - 5y}{\frac{3y}{4} - 3y} - \frac{4.\frac{3y}{4} + y}{8.\frac{3y}{4} - 2y} = \frac{\frac{3y}{2} - 5y}{\frac{3y}{4} - 3y} - \frac{3y + y}{6y - 2y}$$

$$= \frac{\frac{3y - 10y}{2}}{\frac{3y - 12y}{4}} - \frac{4y}{4y} = \frac{-7y}{2} \cdot \frac{4}{-9y} - 1 \; (y \neq 0)$$

$$= \frac{14y}{9y} - 1 = \frac{14}{9} - \frac{9}{9} = \frac{5}{9}$$

Vậy: $A = \frac{5}{9}$ với $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ và $y \neq 0$;

b) $B = \frac{3x - y}{2x + 7} + \frac{3y - x}{2y - 7}$ biết $x - y = 7$ ($x \neq -3,5$; $y \neq 3,5$)

$$= \frac{2x + (x - y)}{2x + 7} + \frac{2y - (x - y)}{2y - 7}$$

$$= \frac{2x + 7}{2x + 7} + \frac{2y - 7}{2y - 7} = 1 + 1 = 2 \text{ (với } x \neq -3,5 \text{ và } y \neq 3,5)$$

Vậy:

$B = 2$ với $x - y = 7$, $x \neq -3,5$ và $y \neq 3,5$

2. a) $f(1) = 0$, vậy $x = 1$ là một nghiệm của đa thức $f(x)$

$f(2) = 0$, vậy $x = 2$ cũng là một nghiệm của đa thức $f(x)$;

b) $g(-1) = (-1)^5 + (-1)^4 + 5.(-1)^3 + 5.(-1)^2 + 2.(-1) + 2$

$= -1 + 1 - 5 + 5 - 2 + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$ là một nghiệm của đa thức $g(x)$.

3. Với $x = 1$ thì $f(1) = a + b + c + d$ mà $a + b + c + d = 0$ (giả thiết) nên $x = 1$ là một nghiệm của đa thức $f(x)$.

$x = -1$ thì $f(-1) = -a + b - c + d = 0$ (giả thiết) $\Rightarrow x = -1$ là một nghiệm của đa thức $f(x) \Rightarrow$ đpcm.

4. a) $xy^2 = 8$ (1) và $x^2y = -64$ (2)

– Nhân (1) và (2) vế với vế ta có:

$xy^2.x^2y = 8.(-8^2)$

$(xy)^3 = -8^3 = (-8)^3 \Leftrightarrow xy = -8$ (3)

– Thay (3) vào (1) ta có: $-8y = 8 \Leftrightarrow y = -1$

Thay (3) vào (2) ta có: $-8x = -64 \Leftrightarrow x = 8$

Vậy: $\begin{cases} x = 8 \\ y = -1 \end{cases}$

b) $A = 3x^2y$; $B = 2xy^2$; $C = 5xy$

$A + B - C = 3x^2y + 2xy - 5xy = xy(3x + 2y - 5)$ (1)

mà $3x + 2y = 5$ nên $3x + 2y - 5 = 0$ (2)

Thay (2) vào (1) ta có $A + B - C = xy.0 = 0$.

5. $f(x) = 5x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 2x - 5$

$g(x) = 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 - x + 7$

$h(x) = 3x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 1$

a) $A(x) = f(x) + g(x) - h(x) = f(x) + g(x) + [-h(x)]$

$$+\begin{cases} f(x) = 5x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 2x - 5 \\ g(x) = 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 - x + 7 \\ -h(x) = -3x^4 - x^3 - 4x^2 - x - 1 \end{cases}$$

$$A(x) = 4x^4 + 0 - 5x^2 + 0 + 1$$

Vậy $A(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1$;

b) $A(-1) = 4.(-1)^4 - 5(-1)^2 + 1 = 4 - 5 + 1 = 0$

Vậy: $x = -1$ là nghiệm của $A(x)$;

$$A\left(-\frac{1}{2}\right) = 4.\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 5\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 4.\frac{1}{16} - 5.\frac{1}{4} + 1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{5}{4} + 1 = 0$$

Vậy: $x = -\frac{1}{2}$ là nghiệm của $A(x)$;

$$A(0) = 5.0^4 - 5.0^2 + 1 = 1$$

Vậy: $x = 0$ không phải là nghiệm của $A(x)$;

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = 4.\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 5.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 4.\frac{1}{16} - 5.\frac{1}{4} + 1 = 0$$

Vậy: $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của $A(x)$;

$A(1) = 4.1^4 - 5.1^2 + 1 = 4 - 5 + 1 = 0$

Vậy: $x = 1$ là nghiệm của $A(x)$;

Đa thức $A(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1$ có 4 nghiệm là ± 1; $\pm \frac{1}{2}$.

6. a) **Giả sử có** $x_0 \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của $f(x)$ thì $x_0^3 - x_0 + 5 = 0$

$\Rightarrow x_0^3 - x_0 = -5 \Rightarrow (x_0 - 1)x_0(x_0 + 1) = -5$

$x_0 \in \mathbb{Z}$ **nên** $(x_0 - 1)x_0(x_0 + 1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia **hết cho 3** $\Rightarrow -5$ chia hết cho 3 (vô lí) $\Rightarrow$ đpcm;

b) **Giả sử có** $x_0 \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của $P(x)$, vậy $x_0^3 + 5x_0^2 + 2x_0 + 3 = 0 \Rightarrow$

$x_0(x_0^2 + 5x_0 + 2) = -3$.

- **Nếu** x_0 **là số lẻ thì** $x_0^2 + 5x_0 + 2$ là số chẵn $\Rightarrow x_0(x_0^2 + 5x_0 + 2)$ là số chẵn.
- **Nếu** x_0 **là số** chẵn thì $x_0(x_0^2 + 5x_0 + 2)$ là số chẵn mà vế phải là số lẻ **nên mâu thuẫn**. Vậy $P(x)$ không có nghiệm nguyên;

c) $P_8(x) = -x^5(x^3 - 1) - x^2(x - 1) - 1$

- **Nếu** $x \geq 1 \Rightarrow P_8(x) < 0$
- **Nếu** $0 \leq x < 1 \Rightarrow P_8(x) < 0$
- **Nếu** $x < 0 \Rightarrow P_8(x) < 0$

Vậy $P_8(x) < 0$ $\forall x$ nên đa thức $P_8(x)$ vô nghiệm.

7. **Đa thức** $P(x) = x^5 - 1$ có một nghiệm $x = 1$ thì $P(1) = 1^5 - 1 = 1 - 1 = 0$

Ta **chứng minh** $P(x)$ với $x > 1$, $x < 1$ đều vô nghiệm

Thật vậy với $x > 1$ thì $x^5 > 1 \Rightarrow x^5 - 1 > 0$, nên với $x > 1$

$P(x)$ **vô nghiệm**. Với $x < 1$, cũng chứng minh tương tự $P(x) < 0$ nên $P(x)$ **vô nghiệm**. Vậy đa thức $P(x)$ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

8. Ta có **tập M** = {25; 26; 27; 28; 29; 30; 31} và đa thức:

$Q(x) = x + (x - 25)(x - 27)(x - 28)(x - 29)(x - 31)$ thoả mãn điều kiện **bài toán**

• Rõ ràng đa thức Q(x) có các hệ số đều nguyên (thoả mãn điều kiện a);

• Có 5 số 25; 27; 28; 29; 31 $\in$ **M** (số nhỏ nhất là 25 số lớn nhất là 31 ta đều có Q(25) = 25 + 0 = 25, Q(27) = 27 Q(28) = 28; Q(29) = 29; Q(31) = 31. (thoả mãn điều kiện b);

• Q(30) = 30 + 5.3.2.1 (–1) = 30 – 30 = 0

Thoả mãn điều kiện c).

9. Giả sử $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ở đây $0 < x_1 < 1$, $0 < x_2 < 1$ với a, b, c nguyên a > 0.

Khi f(0) và f(1) là số nguyên dương như vậy f(0). f(1) $\geq$ 1 suy ra $a^2x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2) \geq 1$

Bây giờ ta giả sử rằng luôn luôn $x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $x = \frac{1}{2}$. Hai số x_1 và x_2 khác nhau còn $x_1(1 - x_1)$ và $x_2(1 - x_2)$ dương thì

$x_1(1 - x_1) \times x_2(1 - x_2) < \frac{1}{16} \Rightarrow a^2 > 16 \Rightarrow a > 4$.

Với a = 5 thì nhận được $f(x) = 5x^2 - 5x + 1$ thì f(x) có hai nghiệm khác nhau thuộc [0; 1].

10. Giả sử $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hiệu

$$P(62) - P(19) = a(62^3 - 19^3) + b(62^2 - 19^2) + c(62 - 19)$$

Chia hết cho 43 và không thể bằng 1.

Ở đây cần lưu ý đối với bất kì một đa thức P(x) nào với hệ số nguyên thì hiệu $P(x_1) - P(x_2)$ với x_1 và x_2 là số nguyên khác nhau thì chia hết cho $x_1 - x_2$.

PHẦN HÌNH HỌC

Chương III

QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC. CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY CỦA TAM GIÁC

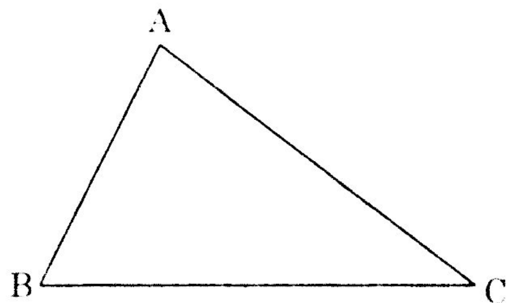
§1. QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định lí 1. Trong tam giác góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn (h.13)

2. Định lí 2. Trong tam giác cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn Δ ABC: $\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow AC > AB$ (h.13)

$$BC > AB \Rightarrow \hat{A} > \hat{C}$$



Hình 13

3. Nhận xét. • Từ hai định lí trên ta có thể viết.

$$BC > AB \Leftrightarrow \hat{A} > \hat{C}$$

• Trong tam giác có một góc tù thì cạnh đối diện với góc tù là cạnh lớn nhất.

• Trong tam giác vuông cạnh huyền là cạnh lớn nhất.

Ví dụ 1. Cho tam giác NMP, MN < MP, D là trung điểm của NP. Trên tia đối của tia DM lấy điểm F sao cho DF = DM.

Chứng minh: a) $\widehat{FMP} < \widehat{MFP}$

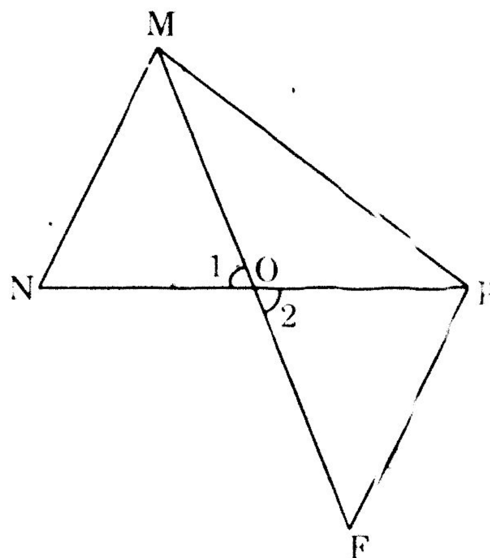
b) $\widehat{FMP} < \widehat{NMF}$

Giải

a) $\Delta MDN = \Delta FDP$ (c.g.c) $\Leftrightarrow MN = FP$

$\widehat{NMD} = \widehat{DFP}$. Trong tam giác MFP có $FP < MP$, $FP = MN$, $MN < MP \Rightarrow \widehat{FMP} < \widehat{MFP}$

b) $\widehat{NMF} = \widehat{MFP}$ mà $\widehat{PMF} < \widehat{MFP}$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{PMF} < \widehat{NMF}$



Hình 14

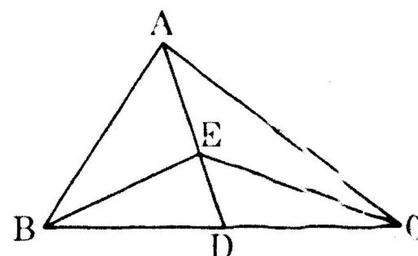
Ví dụ 2

Cho tam giác ABC ($AB < AC$), AD là trung tuyến, E là điểm bất kì trên AD. Chứng minh rằng:

$$\widehat{ADB} < \widehat{ADC};\ CE > BE.$$

Giải

Xét 2 tam giác ADB và ADC ta có $BD = DC$ (gt), AD chung mà $AB < AC$ (gt) $\Rightarrow \widehat{ADB} < \widehat{ADC}$. Xét 2 tam giác EDB và EDC, chúng có $DB = DC$ (gt), ED chung mà $\widehat{EDC} > \widehat{EDB} \Rightarrow EC > EB$ (h.15).



Hình 15

II. BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC ($AC > AB$), M là trung điểm của cạnh BC. Trên AB và AC lấy hai điểm P và N sao cho $BP = CN$. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{APN} > \widehat{ANP}$; b) $PM > MN$ suy ra $\widehat{PNM} > \widehat{NPM}$

2. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$). Trên cạnh AC dựng tam giác đều AEC. Biết chu vi của tam giác đều là 18cm và lớn hơn chu vi của tam giác ABC 2cm. Tính cạnh đáy BC, suy ra $\widehat{A} < 60^o$.

3. Biết một góc ở đáy của một tam giác cân bằng 60^o, hãy so sánh cạnh đáy và cạnh bên.

4. Chứng minh rằng, trong một tam giác cân, nếu cạnh đáy lớn hơn cạnh bên thì góc ở đáy bé hơn 60^o.

5. Cho tam giác ABC, kẻ trung tuyến AM

a) Chứng minh rằng nếu $AM > \frac{1}{2}BC$ thì $\widehat{BAC}$ là góc nhọn;

b) Chứng minh rằng nếu $AM < \frac{1}{2}BC$ thì $\widehat{BAC}$ là góc tù;

c) Chứng minh rằng nếu $AM = \frac{1}{2}BC$ thì $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

6. Cho tam giác ABC, kẻ trung tuyến AM. Chứng minh rằng:

a) Nếu AB < AC thì $\widehat{BAM} > \widehat{CAM}$;

b) Nếu $\widehat{BAM} > \widehat{CAM}$ thì AB < AC;

c) Nếu AB = AC thì $\widehat{BAM} = \widehat{CAM}$ và đảo lại nếu $\widehat{BAM} = \widehat{CAM}$ thì AB = AC.

7. Cho tam giác ABC, kẻ trung tuyến AM và phân giác AD.

a) Chứng minh rằng nếu AB < AC thì điểm D nằm giữa hai điểm B và M;

b) Chứng minh rằng nếu điểm D nằm giữa hai điểm B và M thì AB < AC.

8. Cho đoạn thẳng nối từ một đỉnh đến một điểm của cạnh đối diện với đỉnh đó. Chứng minh rằng độ dài đoạn thẳng đó nhỏ hơn cạnh lớn trong hai cạnh còn lại.

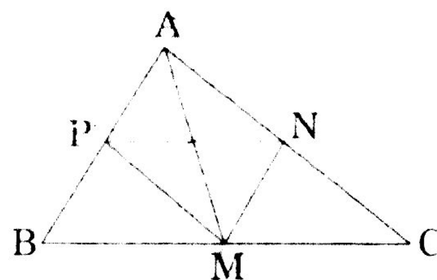
9. Trong tam giác ABC xác định điểm D sao cho AD = AB. Chứng minh rằng AC > AB.

10. Cho tam giác ABC có cạnh AB > AC, AD là đường phân giác góc A. Chứng minh:

a) $\widehat{ADB} > \widehat{ADC}$;

b) BD > CD.

II. HƯỚNG DẪN GIẢI

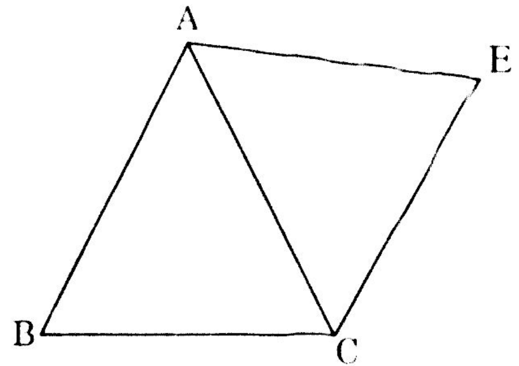


Hình 16

1. (h.16) a) P nằm giữa hai điểm A và B nên AB = AP + PB, N nằm giữa hai điểm A và C nên AC = AN + NC mà BP = CN (giả thiết); AC > AB (giả thiết) ⇒ AN > AP.

Trong ΔAPN, AN > AP, suy ra $\widehat{APN} > \widehat{ANP}$;

b) Xét hai tam giác CMN và BMP, chúng có MB = MC, BP = CN (gt), mà AC > AB $\Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$. Từ đó suy ra PM > MN. Trong ΔPMN, PM > MN suy ra $\widehat{PMN} > \widehat{NPM}$.



Hình 17

2. (h.17) ΔACE là tam giác đều nên $AE = EC = AC = \frac{18}{3}$ cm = 6cm $\Rightarrow$ AB = 6cm.

Chu vi ΔABC nhỏ hơn chu vi ΔACE là 2 cm nên chu vi ΔABC bằng 18 – 2 = 16 (cm). Vậy AB + AC + BC = 16 (cm).

12cm + BC = 16 cm $\Rightarrow$ BC = 16 – 12 = 4 (cm)

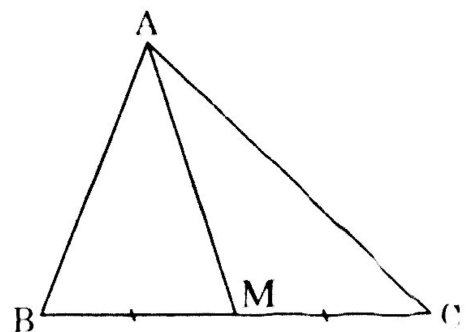
Hai tam giác ABC và ACE có AB = AC = AE = 6 cm, cạnh BC = 4cm < CE = 6 cm. Nên $\hat{A} < \widehat{CAE}$.

Suy ra $\hat{A} < 60^o$ vì $\widehat{CAE} = 60^o$ (góc của tam giác đều)

3. Biết một góc ở đáy tam giác cân bằng 60^o ta suy ra góc còn lại ở đáy cũng bằng 60^o. Như vậy tổng hai góc ở đáy bằng 120^o, do đó góc ở đỉnh cũng bằng 60^o (vì $180^o - 120^o = 60^o$). Ta suy ra cạnh đáy (đối diện với góc ở đỉnh) bằng cạnh bên.

4. Trong một tam giác cân, nếu cạnh đáy lớn hơn cạnh bên thì góc ở đỉnh lớn hơn góc ở đáy. Giả sử góc ở đỉnh là a^o và góc ở đáy của tam giác cân là b^o thì ta có: $a^o > b^o$ và $a^o + 2b^o = 180^o$; từ đó ta suy ra $b^o + 2b^o < 180^o$, tức là $3b^o < 180^o$ hay $b^o < 60^o$.

Vậy góc ở đáy tam giác đã cho bé hơn 60^o.



Hình 18

5. $AM > \frac{1}{2}BC$ (giả thiết) mà $BM = MC = \frac{1}{2}BC$ (giả thiết) nên AM > BM và AM > MC

Δ ABM có AM > BM nên $\hat{B} > \widehat{MAB}$ (1) (Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác)

ΔAMC có $AM > MC$ nên $\widehat{C} > \widehat{MAC}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MAB} + \widehat{MAC} < \widehat{B} + \widehat{C}$, cộng thêm $\widehat{BAC}$ vào 2 vế ta có:

$2\widehat{BAC} < \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{A} = 180^0$. Vậy $\widehat{BAC} < 90^0$;

b) HS tự chứng minh

c) Học sinh tự chứng minh.

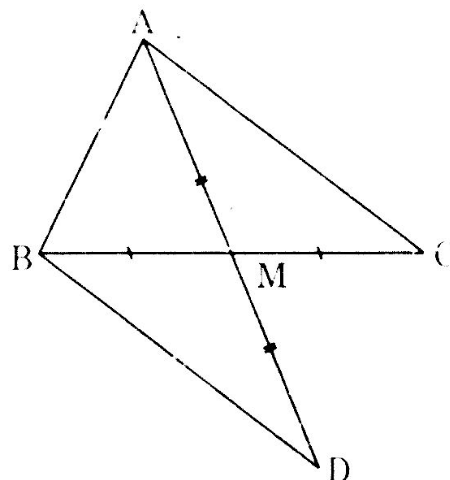
6. a) Kéo dài AM để có MD = AM, mà MB = MC (giả thiết); $\widehat{AMC} = \widehat{BMD}$ (đối đỉnh) nên $\Delta AMC = \Delta BMD$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ AC = BD và AB < AC nên AB < BD.

ΔABD có AB < BD nên $\widehat{D} < \widehat{BAD}$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác). Vậy $\widehat{BAM} > \widehat{MAC}$;

b) HS tự chứng minh;

c) HS tự chứng minh.



Hình 19

7. a) theo bài 2 ta có nếu AB < AC thì

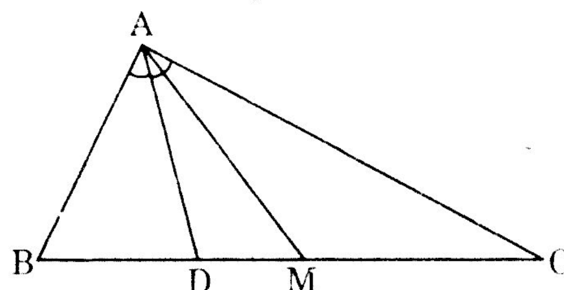
$\widehat{BAM} > \widehat{MAC} \Rightarrow$

$\widehat{CAM} + \widehat{MAB} < 2\widehat{MAB}$

$\Rightarrow \widehat{MAB} > \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{BAD}$

Xét nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB có chứa điểm C, ta có $\widehat{BAM} > \widehat{BAD}$ nên tia AD nằm giữa hai tia AM và AB. Vậy D nằm giữa B và M;

b) Học sinh tự chứng minh.

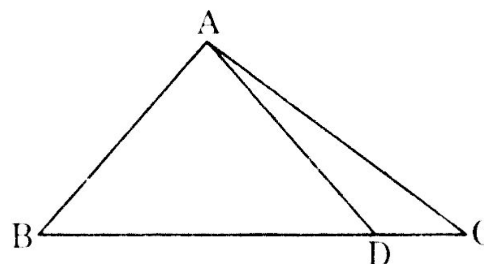


Hình 20

8. Cho ΔABC với AC > AB. Chứng minh AD < AC.

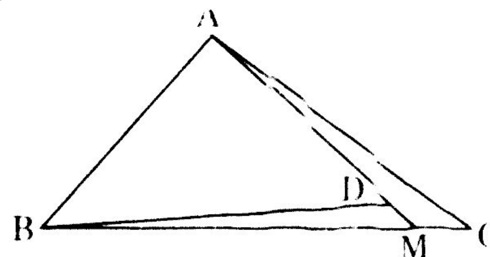
Thật vậy, nếu ΔABC có AC > AB $\Rightarrow$ $\widehat{B} > \widehat{C}$ (định lí)

Xét ΔADC dễ dàng có $\widehat{D} > \widehat{C} \Leftrightarrow$ AD < AC (định lí)



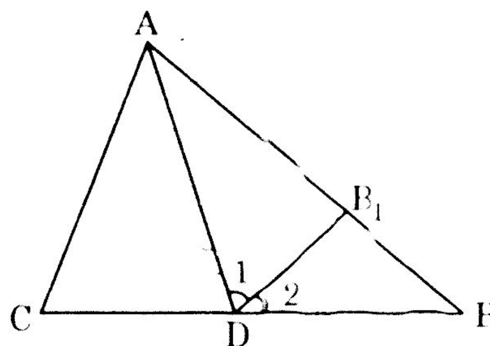
Hình 21

9. Trong ΔABC giả sử tìm được điểm D, sao cho AB = AD, đường thẳng AD cắt BC tại M ta có AM > AB (do AM = AD + DM = AB + DM > AB (vì DM > 0)). Theo chứng minh ở bài 8, AM < AC. Do đó AC > AB.



Hình 22

10. Trên cạnh AB lấy điểm B_1 sao cho $AB_1 = AC \Rightarrow \Delta ACD = \Delta AB_1D$ (c.g.c) $\Rightarrow CD = DB_1 \Rightarrow \widehat{CDA} = \widehat{D_1}$ mà $\widehat{ADB} = \widehat{D_1} + \widehat{D_2}$ $(\widehat{D_2} > 0) \Rightarrow \widehat{ADB} > \widehat{CDA}$.



Hình 23

Xét ΔBB_1D: $\widehat{BB_1D} = \widehat{D_1} + \widehat{B_1AD} =$

$= \widehat{CDA} + \widehat{B_1AD} = (1)$

Mà $\widehat{CDA} = \widehat{B} + \widehat{DAB}$ nên $\widehat{CDA} > \widehat{B}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BB_1D} > \widehat{B} \Rightarrow DB > DB_1$ (định lí). Do đó DB > CD (do $CD = DB_1$ chứng minh trên).

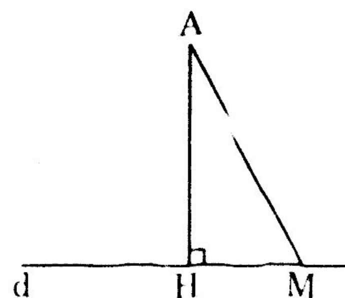
§2. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN, ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đường vuông góc, đường xiên, hình chiếu của đường xiên

Từ A ngoài đường thẳng (d) kẻ $AH \perp (d)$

- Đoạn thẳng AH gọi là *đường vuông góc* kẻ từ điểm A đến đường thẳng (d).
- Điểm H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống (d) gọi là *hình chiếu* của điểm A trên đường thẳng (d)



Hình 24

• Đoạn thẳng AM (M là một điểm bất kì trên (d) không trùng với H) gọi là *đường xiên*.

• Đoạn thẳng HM gọi là hình chiếu của đường xiên AM trên đường thẳng (d)

2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên

Định lí 1. Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.

Ở hình 24 AH < AM, độ dài đoạn thẳng AH gọi là khoảng cách từ A đến đường thẳng (d)

3. Các đường xiên và hình chiếu của chúng

Định lí 2. Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài đường thẳng đến đường thẳng đó:

• Đường xiên có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.

• Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.

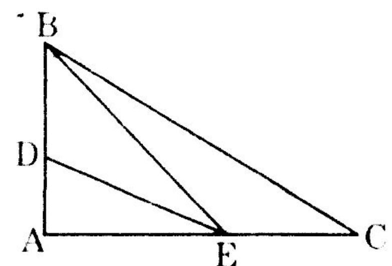
• Nếu hai đường xiên bằng nhau thì có hình chiếu bằng nhau và ngược lại nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, $\widehat{A} = 1v$.

a) Cho điểm E là điểm bất kì trên cạnh AC. Chứng minh: BE ≤ BC.

b) Cho điểm D nằm trên AB, chứng minh: DE ≤ BC.

Giải.(h.25) a) AE là hình chiếu của BE trên AC và AC là hình chiếu của BC trên AC. Vì E là điểm nằm trên cạnh AC nên E nằm giữa hai điểm A và C nên AC = AE + EC, mà EC > 0. Do vậy AE < AC ⇒ BE < BC. Khi E trùng với C thì BE = BC. Nên bao giờ ta cũng có BE ≤ BC (1)



Hình 25

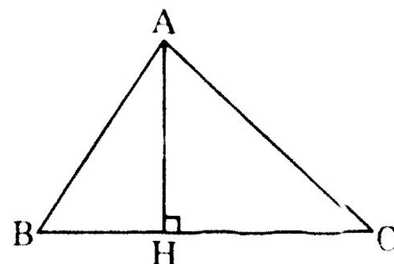
b) Cho điểm D nằm trên AB chứng minh tương tự như câu a) ta có DE ≤ BE (2)

So sánh (1) và (2) ta có: DE ≤ BC. (Dấu bằng xảy ra khi E trùng với C và D trùng với B).

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC, AB < AC. Kẻ đường cao AH. Chứng minh rằng HB < HC

Giải

(h.26) HB và HC là hình chiếu của cạnh AB và AC trên cạnh BC mà AB < AC, vậy HB < HC.



Hình 26

II. BÀI TẬP

1. Cho điểm A ngoài đường thẳng a.

a) Từ điểm A hãy dựng hai đường xiên AM, AN sao cho AM = AN và $\widehat{MAN} = 60^o$;

b) Cho đường xiên AM = 18cm. Tính hình chiếu của hai đường xiên.

2. Cho tam giác cân MNP (MP = MN), kẻ đường cao MH. Lấy một điểm A trên MH, nối A với N và P. Chứng minh: AN = AP.

3. Hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tai I, I là trung điểm của mỗi đoạn thẳng. Cho AB = 6cm, CD = 8cm, $\widehat{AIC} = 60^o$.

a) Tìm độ dài hình chiếu của đoạn thẳng AB trên đường thẳng CD.

b) Tìm độ dài hình chiếu của đoạn thẳng CD trên đường thẳng AB.

4. Cho một điểm A ngoài đường thẳng xy:

a) Xác định trên đường thẳng xy hai điểm M và N sao cho hai đường xiên AM = AN;

b) Chứng minh rằng điểm D nằm trên xy, nếu D nằm trên đoạn thẳng MN thì AD < AM, nếu D không nằm trên đoạn thẳng MN thì AD > AM.

5. Cho Δ ABC, đường cao AH ⊥ BC, BH < HC. Xét điểm M di động trên cạnh BC, điểm M ở vị trí nào thì:

a) AM có độ dài nhỏ nhất?

b) AM có độ dài lớn nhất?

6. Cho ΔABC có $\hat{C} < \hat{B}$, kẻ đường cao AD ⊥ BC.

a) Chứng minh DB < DC;

b) Lấy điểm E bất kì trên AD, chứng minh $\widehat{ECB} < \widehat{EBC}$. Từ đó suy ra $\widehat{BED} < \widehat{DEC}$.

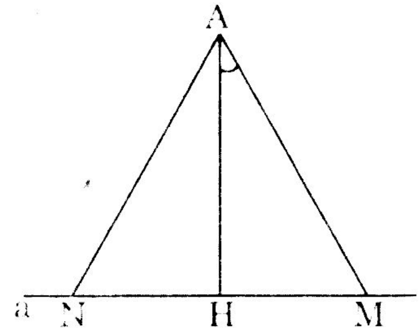
7. Cho tam giác vuông ABC có $\hat{A} = 90^\circ$, AB < AC. Kẻ đường cao AH, phân giác AD và trung tuyến AM.

a) Chứng minh $\widehat{BAH} < \widehat{BAD} < \widehat{BAM}$;

b) So sánh độ dài các đoạn thẳng AH, AD và AM.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) (h.27) Dựng AH ⊥ a, dựng $\widehat{HAx} = 30^\circ$ tia Ax cắt đường thẳng a tại M (Ax không thể song song với a). Trên tia đối của tia HM xác định điểm N sao cho HM = HN. Vậy hai đường xiên AM và AN là hai đường xiên phải dựng.



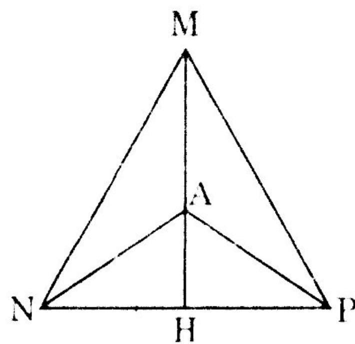
Hình 27

(Độc giả tự chứng minh: AM = AN và $\widehat{MAN} = 60^\circ$).

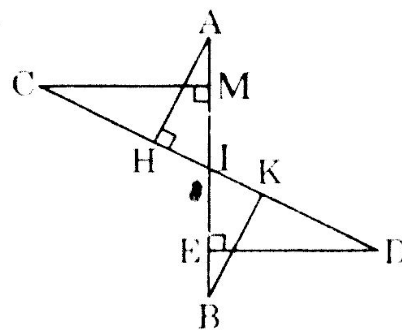
b) Tam giác AMN là tam giác đều nên MN = AM = AN = 18(cm).

Vậy $HM = HN = \frac{18}{2} = 9$(cm).

2. (h.28) MH ⊥ NP nên HN và HP là hình chiếu của đoạn thẳng AN và AP. HN = HP vì ΔMNP là tam giác cân. Vậy AN = AP.



Hình 28



Hình 29

3. (h.29) Từ C và D kẻ CM ⊥ AB, DE ⊥ AB ⇒ CM // DE. Vậy nếu E thuộc nửa mặt phẳng (I) bờ là đường thẳng CD thì M nằm trên nửa mặt (II) là nửa mặt phẳng đối của nửa mặt phẳng (I) cho nên I nằm giữa hai điểm M và E và ME là hình chiếu của đoạn thẳng CD trên AB. Xét tam giác vuông CIM, $\hat{I} = 60^\circ \Rightarrow \hat{C} = 30^\circ$, vậy $IM = \frac{1}{2}CI$, $IM = \frac{1}{2}.4 = 2$ (cm).

Cũng chứng minh tương tự IE = 2 cm; I nằm giữa hai điểm E và M nên ME = MI + IE = 2 + 2 = 4 (cm);

b) Hình chiếu của đoạn thẳng AB trên CD là HK. Cũng chứng minh tương tự ta tính được HK = 3cm.

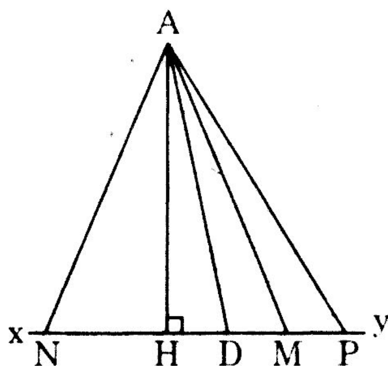
4. (h.30) a) Kẻ AH ⊥ xy. Trên tia Hy xác định M và trên tia đối Hx xác định điểm N sao cho HM = HN. Ta có đường xiên AN = AM;

b) Nếu D nằm trên tia Hy và D nằm giữa H và M (D nằm trên đoạn thẳng MN).

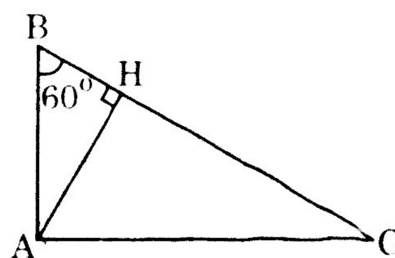
HD < HM ⇒ AD < AM.

Nếu D nằm trên tia Hx và D nằm giữa HN cũng chứng minh tương tự ta có AD < AM.

Nếu D nằm trên xy nhưng không nằm trên đoạn thẳng NM. Giả sử D' nằm trên tia Hy nhưng nằm ngoài đoạn HM. Ta có HD' > HM suy ra AD' > AM.



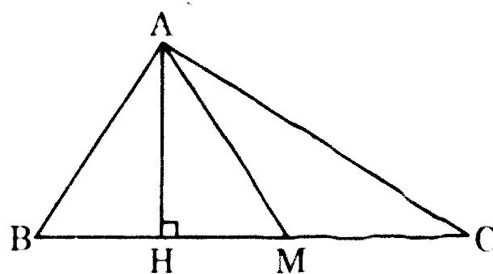
Hình 30



Hình 31

5. • AH ⊥ BC (giả thiết) mà BH < HC (gc) nên AB < AC (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu)

• AH < AB < AC (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên) và AH < AM.



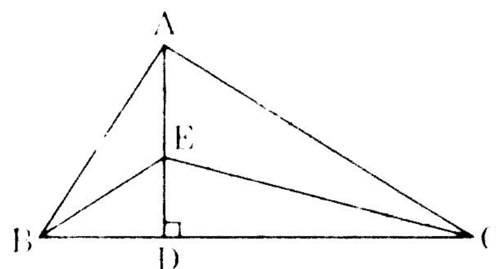
Hình 32

• Nếu M nằm giữa B và H thì HM < HB nên AH < AM < AB < AC. Nếu M nằm giữa C và H thì MH < HC nên AH < AM < AC. (Quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu).

Vậy: a) Nếu M trùng với H thì AM có độ dài nhỏ nhất (AM = AH);

b) Nếu M trùng với C thì AM có độ dài lớn nhất (AM = AC).

6. a) ΔABC có $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$ nên $AB < AC$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác) $AD \perp BC$ (giả thiết) mà $AB < AC$ nên $DB < DC$ (quan hệ giữa hình chiếu và đường xiên);



Hình 33

b) $ED \perp BC$ (giả thiết) mà $DB < DC$ nên $EB < EC$ (quan hệ giữa hình chiếu và đường xiên).

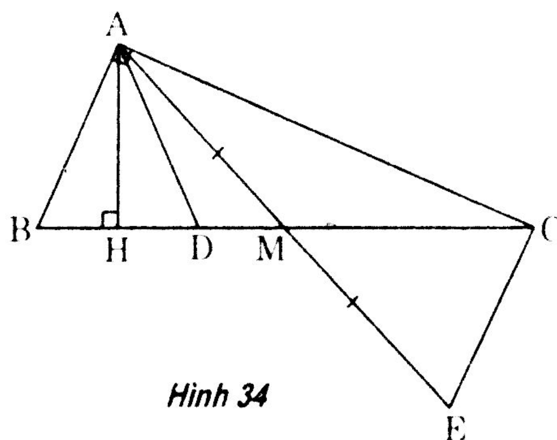
ΔBCE có $EB < EC$ nên $\widehat{ECB} < \widehat{EBC}$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác).

ΔBED có $\widehat{D} = 90^0$ nên $\widehat{BED} + \widehat{EBD} = 90^0$ (1)

ΔCED có $\widehat{D} = 90^0$ nên $\widehat{DEC} + \widehat{DCE} = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BED} + \widehat{EBD} = \widehat{DEC} + \widehat{DCE}$ mà $\widehat{EBC} > \widehat{ECB}$. Vậy $\widehat{BED} < \widehat{DEC}$.

7. a) $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \frac{1}{2}.90^0 = 45^0$ (vì AD là phân giác của $\widehat{A}$) (1)



Hình 34

• $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^0$ (vì $\widehat{BAC} = 90^0$)

$AB < AC$ (giả thiết) nên $\widehat{B} > \widehat{C} \Leftrightarrow \widehat{B} + \widehat{B} > \widehat{C} + \widehat{B} = 90^0$

$2\widehat{B} > 90^0$. Vậy $\widehat{B} > 45^0$ ΔBAH vuông

$\widehat{B} + \widehat{BAH} = 90^0$; mà $\widehat{B} > 45^0$. Vậy $\widehat{BAH} < 45^0$ (2)

• Kéo dài AM để có ME = MA mà MB = MC (giả thiết) và $\widehat{AMB} = \widehat{EMC}$ (đối đỉnh), vậy $\Delta AMB = \Delta CME$ (c,g,c), suy ra $\widehat{E} = \widehat{BAM}$ và $EC = AB < AC$. Mặt khác, ΔACE có $EC < AC$ nên $\widehat{CAE} < \widehat{E} = \widehat{BAM}$ $\Rightarrow \widehat{BAM} + \widehat{BAM} > \widehat{BAM} + \widehat{CAM} = 90^0 \Rightarrow 2\widehat{BAM} > 90^0$. Vậy $\widehat{BAM} > 45^0$. (3)

Từ (1); (2); (3) suy ra $\widehat{BAH} < \widehat{BAD} < \widehat{BAM}$;

b) • Xét nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB có chứa điểm C, có $\widehat{BAH} < \widehat{BAD}$ nên tia AH nằm giữa 2 tia AB và AD, suy ra H nằm giữa

B và D. Lại có $\widehat{BAH} < \widehat{BAM}$ nên tia AH nằm giữa 2 tia AB và AM, suy ra H nằm giữa B và M. Từ các chứng minh trên suy ra D và M cùng phải với H. Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{BAH} + \widehat{HAD} = 45^0 < \widehat{BAH} + \widehat{HAM} = \widehat{BAM} \Rightarrow$ $\widehat{HAD} < \widehat{HAM}$.

Xét nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AH, ta có $\widehat{HAD} < \widehat{HAM}$ nên tia AD nằm giữa 2 tia AH và AM, suy ra D nằm giữa Ha và M, nên HD < HM.

• AH ⊥ BC, AH là đường vuông góc, AD và AM là các đường xiên có các hình chiếu là HD và HM mà HD < HM. Vậy AH < AD < AM.

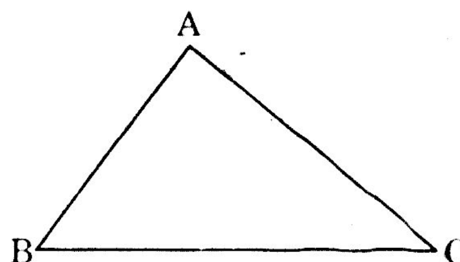
•

§3. QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC – BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Bất đẳng thức tam giác

Định lí. Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng lớn hơn độ dài cạnh còn lại.



Hình 35

Từ (h.35) ta có các bất đẳng thức

AB + AC > BC

AB + BC > AC

AC + BC > AB

2. Hệ quả. Trong một tam giác, hiệu độ dài hai cạnh bất kì bao giờ cũng nhỏ hơn độ dài cạnh còn lại.

AB > BC – AC; AC > BC – AB; BC > AC – AB (h.35)

3. Nhận xét. Kết hợp định lí và hệ quả ta có thể phát biểu như sau:

Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng các độ dài của hai cạnh còn lại.

Trong mọi ΔABC, với cạnh AB ta luôn có:

$$BC - AC < AB < BC + AC$$

Ví dụ 1. Có thể có tam giác nào mà ba cạnh có độ dài như sau không?

a) Một cạnh 5 cm, hai cạnh khác bằng 10 cm.

b) Một cạnh bằng 10cm hai cạnh khác bằng 5 cm.

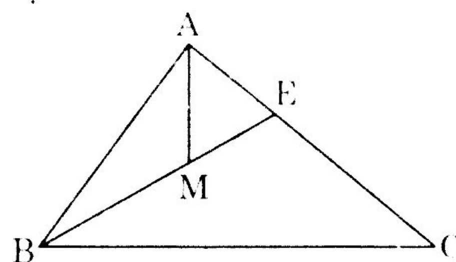
Giải

a) Có tam giác cân cạnh đáy bằng 5 cm, hai cạnh bên bằng 10 cm.

b) Không có tam giác nào vì 5 + 5 = 10 (cm), hoặc 10 ≮ 5 trái với bất đẳng thức tam giác.

Ví dụ 2. Cho điểm M nằm trong tam giác ABC, chứng minh

$$AM + BM < BC + AC$$



Hình 36

Giải (h.36) Đường thẳng BM cắt AC ở E. Trong ΔEBC, BE < EC + BC (1). Trong ΔMAE, MA < ME + EA (2). Cộng vế với vế của (1) và (2) ta có:

BE + MA < EC + ME + EA + BC (3)

M là điểm nằm giữa hai điểm B và E ta có BM + ME = BE, E là điểm nằm trên cạnh AC.

Vậy từ (3) ta có:

$$MB + ME + MA < AC + BC + ME$$

$$\Rightarrow MB + MA < AC + BC.$$

II. BÀI TẬP

1. Cho BB' là phân giác tam giác ABC. Chứng minh rằng BA > B'A, BC > B'C.

2. Chứng minh rằng đường trung tuyến của tam giác nhỏ hơn nửa chu vi của tam giác ấy.

3. Gọi N là điểm nằm trong tam giác ABC có chu vi bằng 2p. Chứng minh rằng: p < NA + NB + NC < 2p.

4. Chứng minh rằng: a) Trong một tam giác đường cao thuộc cạnh thứ ba nhỏ hơn nửa tổng hai cạnh kia;

   b) Tổng ba đường cao của một tam giác bao giờ cũng nhỏ hơn chu vi của tam giác.

5. Tìm các tam giác mà ba cạnh đều là số nguyên xentimet, biết hai cạnh là 7 cm, 2 cm.

6. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Chứng minh rằng $MC < \dfrac{AC + BC}{2}$.

7. Ba thành phố A, B, C trên một bản đồ là ba đỉnh của một tam giác, trong đó AB = 30km, AC = 65km.

a) Nếu đặt ở B máy phát sóng có bán kính hoạt động ở 34km thì trong hai thành phố A và C thành phố nào nhận được tín hiệu? Vì sao?

b) Cũng hỏi như trên với máy phát sóng có bán kính hoạt động là 110km.

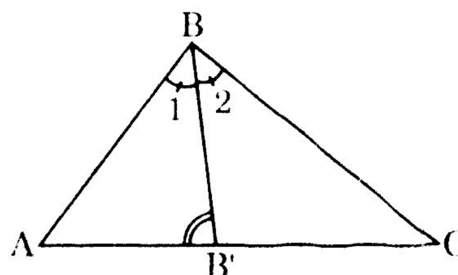
8. Cho tam giác ABC có AC > AB, phân giác AD. Gọi E là một điểm nằm giữa A và D. Chứng minh rằng AC – AB > EC – EB.

9. Chứng minh rằng trong một tam giác, một góc sẽ là góc nhọn, góc vuông hay góc tù tuỳ theo cạnh đối diện với góc ấy nhỏ hơn bằng hay lớn hơn hai lần trung tuyến kẻ tới cạnh đó.

(Thi vào lớp 9 chuyên toán TP Hồ Chí Minh 1983)

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

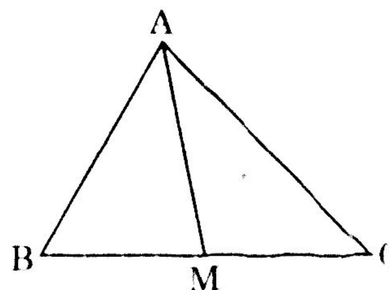
1. Xét tam giác ABB', $\widehat{AB'B}$ là góc ngoài tại đỉnh B' của tam giác BB'C nên $\widehat{AB'B} > \hat{B}_2$ mà $\hat{B}_2 = \hat{B}_1$ (do BB' là phân giác của $\hat{B}$) $\Rightarrow$ $\widehat{AB'B} > \hat{B}_1$ $\Rightarrow$ BA > B'A. Cũng chứng minh tương tự ta có BC > B'C.



Hình 37

2. (h. 38) Tam giác MAC: AM < AC + MC (1). Trong tam giác MAB: AM < AB + BM (2). Cộng vế với vế của (1) và (2) ta có: 2AM < AB + AC + BC (vì M là điểm nằm giữa hai điểm B và C, nên BM + MC = BC). 2AM < chu vi ΔABC.

Do đó $AM < \dfrac{1}{2}$ chu vi ΔABC.



Hình 38

3. Ta có:

$$\begin{array}{rl} & NA + NB < AC + CB \\ + & NA + NC < AB + BC \\ & NB + NC < AB + AC \\ \hline & 2(NA + NB + NC) < 2\underbrace{(AB + AC + BC)}_{2p} \end{array}$$

$\Leftrightarrow NA + NB + NC < 2p.$

Mặt khác ta có:

$$\begin{array}{rl} & NA + NB > AB \\ + & NA + NC > AC \\ & NB + NC > BC \\ \hline & 2(NA + NB + NC) > AB + AC + BC \end{array}$$

$2(NA + NB + NC) > 2p$

$\Rightarrow NA + NB + NC > p.$

Cuối cùng ta có: $p < NA + NB + NC < 2p.$

4. a) Kẻ đường cao AH của tam giác ABC ta có $AH < AB$ (cạnh góc vuông nhỏ hơn cạnh huyền), tương tự ta có: $AH < AC$. Vậy

$$2AH < AB + AC \Rightarrow AH < \frac{AB + AC}{2};$$

b) Gọi 3 đường cao của tam giác ABC là AH, BH', CH'' ta có:

$$\left.\begin{array}{l} AH < AC \\ BH' < AB \\ CH'' < BC \end{array}\right\} \Rightarrow AH + BH' + CH'' < 2p$$

(cũng có thể chứng minh từ câu a).

5. Gọi độ dài cạnh thứ ba phải tìm là a. Theo bất đẳng thức tam giác ta có $7 - 2 < a < 7 + 2 \Leftrightarrow 5 < a < 9$

$\Leftrightarrow a = 6; 7; 8$

Vậy có ba tam giác mà độ dài 3 cạnh lần lượt là: 7cm, 2cm, 6 cm; 7 cm, 2 cm, 7 cm; 7 cm, 2 cm, 8 cm.

6. Hình 39

Trên tia đối của tia MC lấy điểm N sao cho $MN = MC$, ta có:

Hình 39

$\Delta MAN = \Delta MBC$ (c.g.c), suy ra BC = AN.

Trong tam giác ANC, theo bất đẳng thức tam giác thì NC < AN + AC. Mà NC = 2MC, còn AN = BC, do đó 2MC < AC + BC, suy ra $MC < \frac{AC + BC}{2}$.

7. Xét tam giác ABC, theo bất đẳng thức tam giác ta có:

$$AC - AB < BC < AB + AC$$

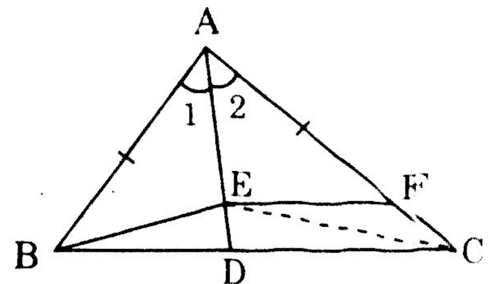
$$65 - 30 < BC < 65 + 30$$

hay $35 < BC < 95$.

a) Nếu máy phát sóng ở B có bán kính hoạt động bằng 34 km thì ở A nhận được tín hiệu (vì 34 km > 30km), còn ở C không nhận được tín hiệu (Vì 34km < 35km < BC);

b) Nếu máy phát sóng ở B có bán kính hoạt động bằng 110km thì ở cả A và C đều nhận được tín hiệu (vì 110km > 30km = AB; 110km > 95 km > BC).

8. Hình 40



Hình 40

Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho AF = AB, ta có:

$\Delta AEB = \Delta AEF$ (c.g.c) suy ra EB = EF (1)

Trong tam giác EFC, theo bất đẳng thức tam giác ta có:

FC > EC – EF (2)

Từ (1) và (2), suy ra FC > EC – EB (3).

Vì AC > AB mà AF = AB nên trên cạnh AC thì điểm F nằm giữa A và C, ta có FC = AC – AF = AC – AB (4).

Từ (3) và (4) ta được AC – AB > EC – EB.

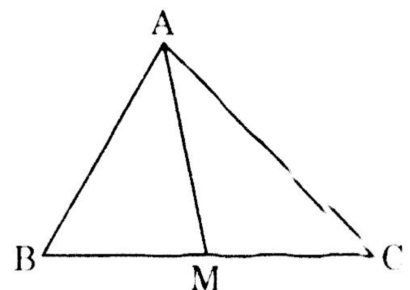
9. Giả sử có ΔABC, AM là trung tuyến.

Ta phải chứng minh 3 trường hợp sau:

1) Nếu BM < AM thì $\widehat{A}$ nhọn;

2) Nếu BM = AM thì $\widehat{A}$ = 1v;

3) Nếu BM > AM thì $\widehat{A}$ tù;



Hình 41

Chứng minh trường hợp 1:

Xét ΔABM có $BM < AM \Rightarrow \widehat{BAM} < \hat{B}$ (định lí)

Xét ΔACM có $MC < AM \Rightarrow \widehat{CAM} < \hat{C}$ (định lí).

Suy ra $\widehat{BAM} + \widehat{CAM} < \hat{B} + \hat{C}$ hay $\hat{A} < \hat{B} + \hat{C}$

Nếu $\hat{A}$ tù thì $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180^0$ mâu thuẫn với định lí tổng các góc trong một tam giác bằng 180^0.

Vậy góc $\hat{A}$ nhọn;

Trường hợp 2:

Nếu $AM = BM = MC \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$ mà $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Rightarrow \hat{A} = 90^0$;

Trường hợp 3:

Chứng minh tương tự như trường hợp 1.

§4. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

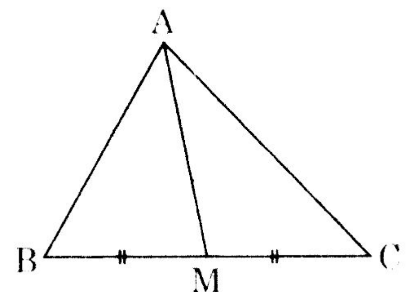
I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đường trung tuyến của tam giác

Đoạn thẳng nối đỉnh với trung điểm của cạnh đối diện gọi là đường trung tuyến của tam giác.

Ở hình 42a đoạn thẳng AM nối đỉnh A với điểm M là trung điểm BC, AM là một trung tuyến của tam giác ABC.

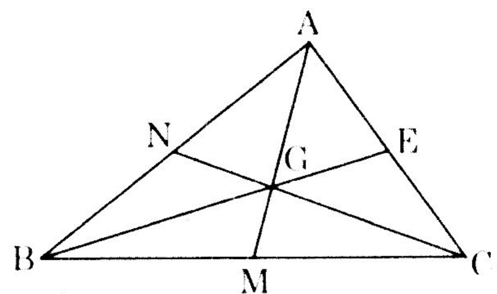
Như vậy một tam giác có 3 trung tuyến.



Hình 42a

2. Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác

Định lí. Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.



Hình 42b

Chẳng hạn ΔABC có ba đường trung tuyến AM, BE và CN cùng đi qua điểm G. Điểm G gọi là trọng tâm của ΔABC và ta có $\frac{GA}{AM} = \frac{GB}{BE} = \frac{GC}{CN} = \frac{2}{3}$ (h.42b)

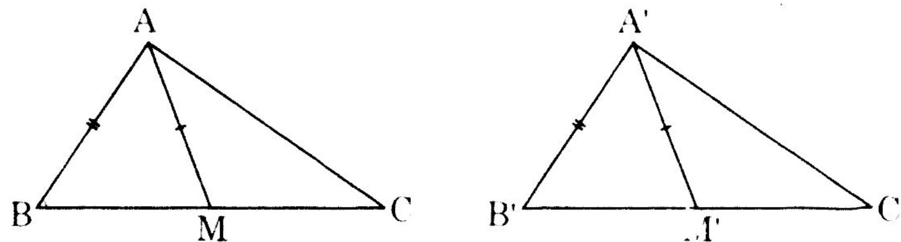
Ví dụ 1. Gọi AM là trung tuyến của tam giác ABC, A'M' là trung tuyến của tam giác A'B'C'. Biết rằng AM = A'M', AB = A'B', BC = B'C'. Chứng minh hai tam giác ABC và A'B'C' bằng nhau.

Giải

Ta có BC = B'C', do đó BM = B'M'. Ta được $\Delta ABM = \Delta A'B'M'$ (c.c.c).

Từ đó suy ra $\hat{B} = \hat{B}'$.

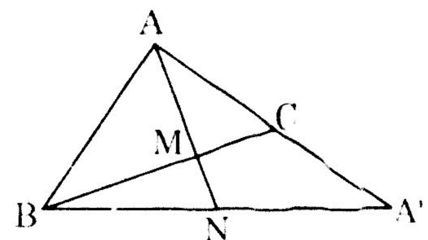
Vì AB = A'B', $\hat{B} = \hat{B}'$ và BC = B'C', nên ta được: $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (c.g.c)



Hình 43

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho BM = $\frac{2}{3}$BC. Trên tia đối của tia CA lấy điểm A' sao cho CA' = CA.

Chứng minh AM cắt BA' tại N và N là trung điểm của BA'.



Hình 44

Giải

Tia AM nằm giữa hai tia AB và AC (vì M nằm giữa hai điểm B và C), B nằm trên tia AB, A' nằm trên tia AC, nên đoạn BA' phải cắt tia AM tại N.

Xét tam giác ABA', BC là trung tuyến (vì A' nằm trên tia đối của tia CA mà AC = CA'), BM = $\frac{2}{3}$BC nên M là trọng tâm của tam giác ABA', vậy AM là trung tuyến của tam giác nên N là trung điểm của BA' (vì AN đi qua M).

II. BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC, các trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G. Gọi F là trung điểm của BG. Nối AF cắt CP ở I.

   a) Chứng minh $PI = \frac{1}{9}PC$;

   b) Kéo dài AM để có ME = MG. Chứng minh NE // AF và NE = AF.

2. Cho tam giác ABC, các trung tuyến AD, BE và CF. Chứng minh:

   AD + BE + CF < chu vi $\Delta ABC < \frac{4}{3}$ (AD + BE + CF).

3. Cho ΔABC, trung tuyến BO. Kéo dài BO để có OM = OB.

   a) Chứng minh AM // BC và CM // AB;

   b) Trên cạnh AC lấy các điểm E và F sao cho AE = EF = FC. Chứng minh tia BE đi qua trung điểm của AM và tia BF đi qua trung điểm của CM.

4. Cho tam giác ABC, ba trung tuyến AM, BN, CF đồng quy tại G

   a) Chứng minh rằng $AM + CF > \frac{3}{2}AC$;

   b) Biết tam giác ABC vuông tại B có AB = 5cm, BC = 12cm. Chứng minh rằng AM + BN + CF > 26cm.

5. Cho tam giác vuông ABC, $\widehat{A} = 90^\circ$; E là trung điểm của AB, F là trung điểm của đoạn AC. Trên cạnh BC lấy các điểm L, M, N sao cho L là trung điểm của BC, M là trung điểm của BL, N là trung điểm của LC. Các đoạn EM và AL cắt đoạn BF tại I và K. Tính độ dài của các đoạn LK, FN và IM. Biết rằng BC = 12cm.

6. Gọi L, M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC.

   a) Chứng minh rằng trọng tâm G của tam giác LMN cũng là trọng tâm của tam giác ABC;

   b) Tính khoảng cách giữa trọng tâm của tam giác LMN và trọng tâm của tam giác ALN. Biết rằng AM = 12 cm.

7. Hai cạnh của một tam giác không bằng nhau. Chứng minh rằng trung tuyến xuất phát từ đỉnh chung của hai cạnh này tạo với cạnh nhỏ một góc lớn hơn góc tạo với cạnh lớn.

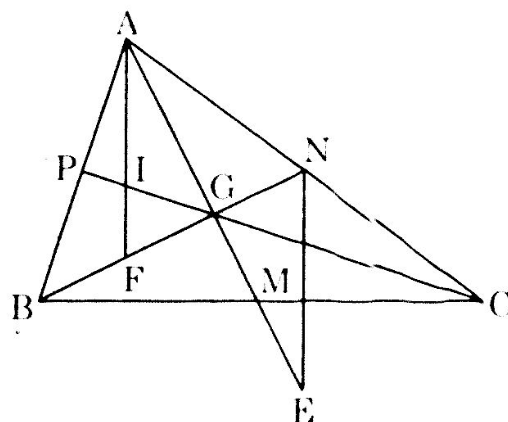
8. Cho tam giác ABC là ba trung tuyến AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại G. Trên cạnh AB lấy điểm E, sao cho $AE = \frac{1}{3}AB$. Trên cạnh AC lấy điểm P sao cho $AP = \frac{1}{3}AC$. Gọi M là giao điểm của BP và CE. Chứng minh:

a) M nằm trên trung tuyến AA_1;

b) G cũng là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) Ba đường trung tuyến của ΔABC cắt nhau tại G nên $PG = \frac{1}{3}PC$ (1) và $MG = \frac{1}{2}AG$; $GN = \frac{1}{2}BG$ (tính chất 3 đường trung tuyến của 1 tam giác). Hai đường trung tuyến AF và GP của ΔGAB cắt nhau tại I nên $IP = \frac{1}{3}GP$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $IP = \frac{1}{9}PC$;



Hình 45

b) MG = ME (giả thiết) và $MG = \frac{1}{2}AG$ nên GE = AG (3)

$GF = FB = \frac{1}{2}BG$ (giả thiết) và $GN = \frac{1}{2}BG$ nên GN = GF (4)

$\widehat{AGF} = \widehat{EGN}$ (đối đỉnh) (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra ΔGAF = ΔGEN (c.g.c), suy ra NE = AF và $\widehat{GAF} = \widehat{GEN}$ mà 2 góc so le trong vậy NE // AF.

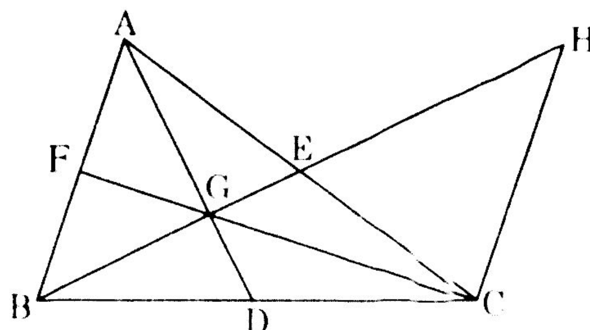
2. Kéo dài BE để có BE = EH (1)

Theo giả thiết ta có AE = EC (2)

và $\widehat{AEB} = \widehat{CEH}$ (2 góc đối đỉnh) (3)

Từ (1), (2); (3) suy ra:

ΔAEB = ΔCEH (c.g.c) ⇒ CH = AB



Hình 46

ΔBCH có $BC + CH > BH$ hay $BC + AB > 2BE$ (4)

Chứng minh tương tự ta có $AB + AC > 2AD$ (5) và $CA + CB > 2CF$ (6).

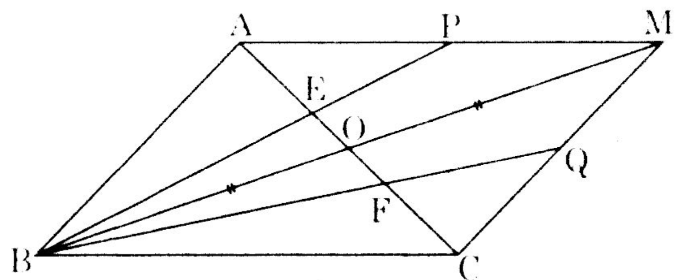
Từ (4), (5), (6) ta có:

$2(BE + AD + CF) < 2(AB + BC + AC)$. Vậy $BE + AD + CF$ nhỏ hơn chu vi ΔABC.

• AD và BE; CF là 3 đường trung tuyến của ΔABC cắt nhau tại G nên $GA = \frac{2}{3}AD$; $GC = \frac{2}{3}CF$; $BG = \frac{2}{3}BE$. ΔGBC có $GB + GC > BC$. Tương tự ta có $GA + GC > AC$; $GA + GB > AB$. Từ đó suy ra $2(GA + GB + GC) > BC + AC + AB$; $2.\frac{2}{3}(AD + BE + CF) >$ chu vi ΔABC.

Vậy $AD + BE + CF <$ chu vi $\Delta ABC < \frac{4}{3}(AD + BE + CF)$.

3. a) Xét ΔOAM và ΔOCB ta có. $OA = OC$ (giả thiết); $OM = OB$ (giả thiết); $\widehat{COB} = \widehat{AOM}$ (đối đỉnh). Vậy $\Delta OAM = \Delta OCB$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{OAM} = \widehat{OCB}$, mà 2 góc so le trong nên AM // BC. Chứng minh tương tự ta cũng có CM // AB;



Hình 47

b) $OA = OC = \frac{1}{2}AC$ (giả thiết); $AE = EF = FC = \frac{1}{3}AC$ (giả thiết) $\Rightarrow$

$AE = EF = FC = \frac{1}{3}.2OA = \frac{2}{3}OA = \frac{2}{3}OC$.

ΔABM có AO là trung tuyến (vì $OB = OM$) và $AE = \frac{2}{3}AO$ nên E là trọng tâm, do đó BP đi qua E thì BP là trung tuyến. Chứng minh tương tự ta có Q là trung điểm của CM.

4. a) (h 48).

Trong tam giác AGC, theo bất đẳng thức tam giác, ta có:

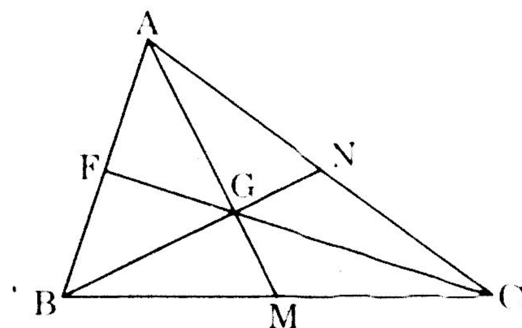
$$GA + GC > AC.$$

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $GA = \frac{2}{3}AM$, $GC = \frac{2}{3}CF$.

Do đó:

$\frac{2}{3}AM + \frac{2}{3}CF > AC$

Suy ra $AM + CF > \frac{3}{2}AC$ (1);



Hình 48

b) Nếu tam giác ABC vuông ở B thì theo định lí Pitago ta có:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$

suy ra AC = 13 (cm).

BN là trung tuyến thuộc cạnh huyền AC của tam giác vuông ABC nên theo ví dụ 4, ta có $BN = \frac{1}{2}AC$ (2)

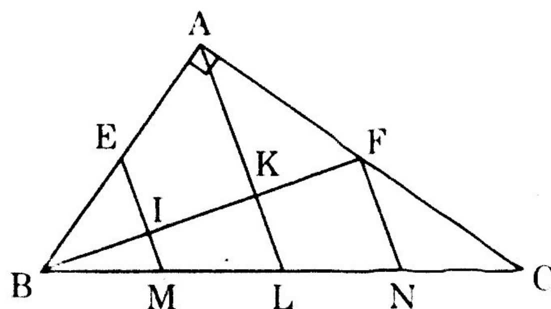
Từ (1) và (2) ta có:

$AM + BN + CF > \frac{3}{2}AC + \frac{1}{2}AC = 2AC = 2.13 = 26$ (cm)

Vậy AM + BN + CF > 26 cm.

5. (h.49) Vì L và F là trung điểm của các cạnh BC và AC nên AL và BF là hai trung tuyến, và do đó K là trọng tâm của tam giác đã cho. Như vậy ta được:

$KL = \frac{AL}{3}$ (theo tính chất của các trung tuyến),



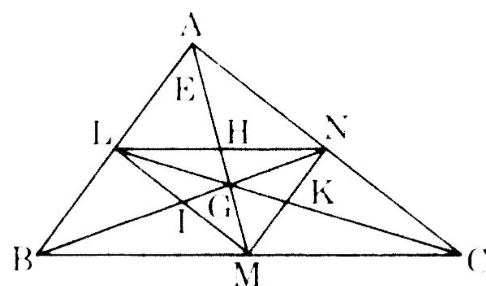
Hình 49

$FN = \frac{AL}{2}$ (theo tính chất của đường trung bình),

$IM = \frac{KL}{2}$ (theo tính chất của đường trung bình).

Mặt khác, nối LF, vì LF là đường trung bình của tam giác ABC nên LF vuông góc với AC, do đó LF cũng là đường trung trực của cạnh AC; như vậy ta có LA = LC, tức là $AL = \frac{BC}{2}$. Thay BC = 12cm, ta được: AL = 6cm; KL = 2cm; FN = 3cm; IM = 1cm.

6. (1.50) a) Kẻ ba trung tuyến của ΔABC là: AM, BN và CL. Biết rằng 3 trung tuyến đó cắt nhau tại trọng tâm G của ΔABC. Gọi H là giao điểm của AM với LN. Vì LN là đường trung bình của tam giác ABC nên LN song song với BC và LN = BM = MC. Do đó LH là đường trung



Hình 50

bình của tam giác ABM và LH = $\frac{BM}{2}$, và HN là đường trung bình của tam giác AMC và HN = $\frac{MC}{2}$. Từ đó ta suy luận LH = HN (vì BM = MC), tức là H là trung điểm của LN. Như vậy MH là trung tuyến ứng với cạnh LN của tam giác LMN.

Gọi I là giao điểm của BN với LM. Gọi K là giao điểm của MN với CL. Tương tự như trên, ta chứng minh được rằng NI và LK là các trung tuyến của tam giác LMN. Rõ ràng G là giao điểm của ba trung tuyến của tam giác LMN.

Vậy trọng tâm của hai tam giác ABC và LMN trùng nhau tại một điểm G;

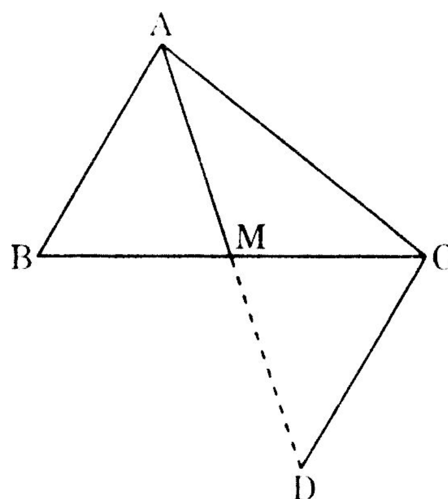
b) Xét hai tam giác ALN và MNL ta có: AL = MN; LN = NL và AN = ML; do đó hai tam giác này bằng nhau (trường hợp c.c.c). Từ đó suy ra AH = MH (trung tuyến tương ứng). Gọi E là trọng tâm của tam giác ALN, ta có EH = $\frac{AH}{3}$. Ta cũng có GH = $\frac{HM}{3}$. Do đó ta được:

EH + GH = $\frac{AH + HM}{3}$ tức là

EG = $\frac{AM}{3}$ = 4(cm).

Vậy EG = 4cm.

7. Giả sử ΔABC có AB < AC và trung tuyến AM. Ta phải chứng minh $\widehat{BAM} > \widehat{MAC}$. Thật vậy, trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho MD = MA.



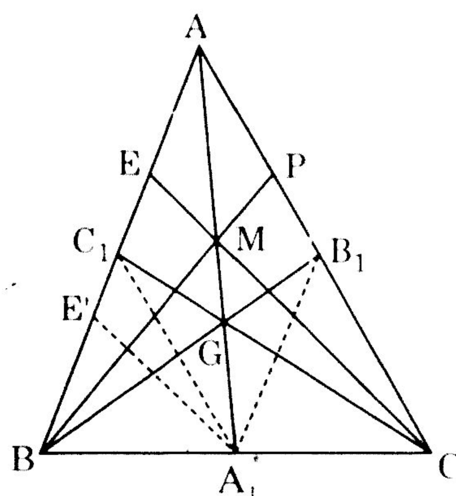
Hình 51

Dễ dàng chứng minh được $\Delta MAB = \Delta MDC$ (c.g.c) $\Rightarrow$ $\widehat{BAM} = \widehat{D}$ và

AB = DC. Xét tam giác ACD có CD < AC (do AB = DC mà AB < AC (gt)) $\Rightarrow \widehat{D} > \widehat{MAC}$.

Do đó $\widehat{BAM} > \widehat{MAC}$ (vì $\widehat{BAM} = \widehat{D}$ (chứng minh trên))

8. a) Gọi E' là trung điểm của EB nên A_1E' là đường trung bình của ΔBCE $\Rightarrow A_1E' \parallel CE$. Trong $\Delta AA_1E'$ dễ dàng có E là trung điểm của AE' mà $A_1E' \parallel CE$ (cmt) $\Rightarrow$ M là trung điểm của AA_1. Cũng chứng minh tương tự AP cắt AA_1 tại M là trung điểm của AA_1 $\Rightarrow$ CE cắt BP tại M là trung điểm của AA_1.



Hình 52

b) Xem a) của bài tập 6

§5. TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

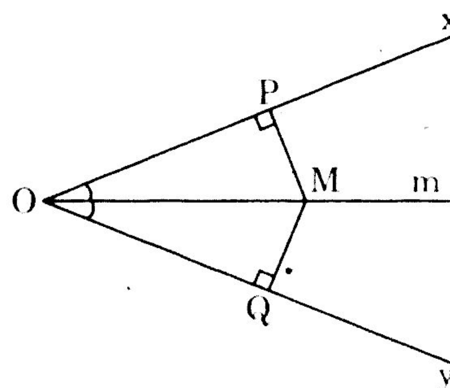
I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tia phân giác của một góc là tia nằm giữa hai cạnh của góc và tạo với hai cạnh ấy hai góc bằng nhau.

2. Định lí (định lí thuận)

Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc.

Hình 53 Tia Om là tia phân giác của góc xOy, M ∈ Om, MP ⊥ Ox, MQ ⊥ Oy thì MP = MQ.

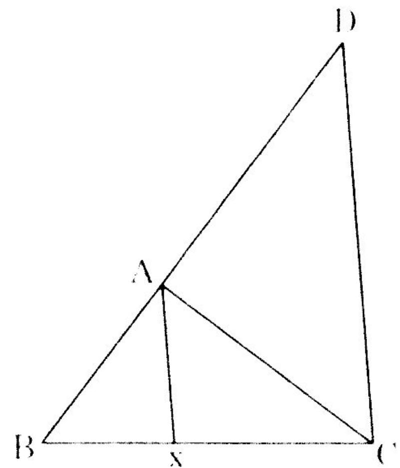


Hình 53

3. Định lí 2. (định lí đảo)

Điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.

4. Kết hợp hai định lí. Tập hợp (quỹ tích) của các điểm nằm trong một góc và cách đều hai cạnh của góc là đường phân giác của góc đó.



Hình 54

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, kẻ tia Ax là tia phân giác của BAC. Tại C kẻ đường thẳng song song với tia Ax, nó cắt tia đối của tia AB tại D. Chứng minh $\widehat{xAB} = \widehat{ACD} = \widehat{ADC}$.

Giải GT: Cho ΔABC, Ax là tia phân giác của góc BAC, CD // Ax, D nằm trên tia đối của tia AB.

KL: $\widehat{xAB} = \widehat{ACD} = \widehat{ADC}$.

Chứng minh:

(h.54) Vì Ax là tia phân giác của góc BAC, nên $\widehat{xAB} = \widehat{xAC}$ (1)

Ax // CD bị cắt bởi đường thẳng AC, hai góc xAC và ACD là hai góc so le trong nên:

$$\widehat{xAC} = \widehat{ACD} \qquad (2)$$

Hai góc xAB và ADC là hai góc đồng vị nên:

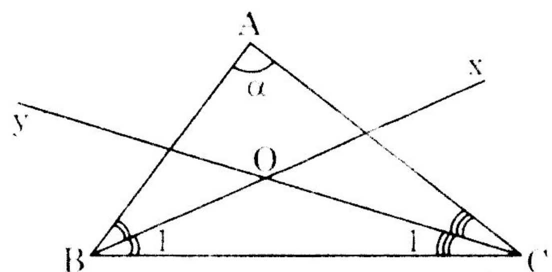
$$\widehat{xAB} = \widehat{ADC} \qquad (3)$$

So sánh (1), (2) và (3) ta có:

$$\widehat{xAB} = \widehat{ACD} = \widehat{ADC}$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau tại O. Tính góc BOC nếu $\hat{A} = \alpha$.

Giải



Hình 55

GT: ΔABC, $\hat{A} = \alpha$, Bx là tia phân giác của $\hat{B}$, Cy là tia phân giác của $\hat{C}$, O = Bx ∩ Cy.

KL: Tính $\widehat{BOC}$

Chứng minh:

Bx là tia phân giác của $\hat{B}$ nên $\hat{B}_1 = \frac{1}{2}\hat{B}$, tương tự $\hat{C}_1 = \frac{1}{2}\hat{C}$. Trong tam giác OBC thì $\widehat{BOC} = 180^o - (\hat{B}_1 + \hat{C}_1) = 180^o - \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}$

Trong tam giác ABC: $\hat{B} + \hat{C} = 180^o - \hat{A} = 180^o - \alpha$. Suy ra $\widehat{BOC} = 180^o - \frac{180^o - \alpha}{2} = 90^o + \frac{\alpha}{2}$

II. BÀI TẬP

1. Cho hai tia đối nhau Ox, Ox'. Trong cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng xx' vẽ các tia Oa, Ob, Oc sao cho $\widehat{xOa} = 30^o$, $\widehat{xOb} = 60^o$, $\widehat{xOc} = 120^o$.

a) Tia nào là tia phân giác của góc xOb?

b) Tia Oc là tia phân giác của góc nào?

2. Cho góc nhọn xOy, kẻ tia phân giác Oz của $\widehat{xOy}$. Trên Oz lấy điểm P, kẻ đường thẳng qua P vuông góc với Ox tại A và cắt Oy tại C, kẻ đường thẳng qua P vuông góc với Oy tại B và cắt Ox tại D.

a) Chứng minh PC = PD

b) Chứng minh tia Pz là tia phân giác của $\widehat{CPD}$.

3. Cho tam giác cân ABC (AB = AC). Trên cạnh AC lấy điểm E, trên cạnh AB lấy điểm F sao cho AE = AF. Nối BE và CF cắt nhau tại O. Tia AO cắt cạnh BC tại M. Chứng minh điểm M cách đều hai cạnh AB và AC.

4. Cho góc xAy. Trên Ax lấy điểm B và trên Ay lấy điểm C sao cho AB = AC. Đường thẳng vuông góc với Ax tại B cắt đường thẳng vuông góc với Ay tại C ở điểm O.

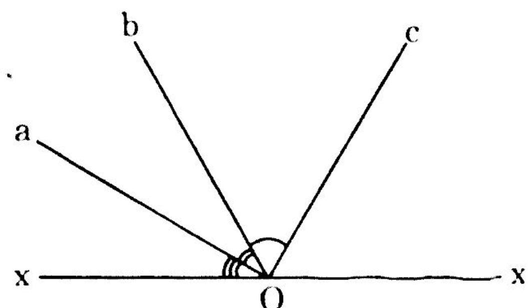
a) Chứng minh O thuộc tia phân giác của $\widehat{xAy}$.

b) Trên AC lấy điểm N (N nằm giữa A và C), trên tia Bx lấy điểm M (B nằm giữa A và M) sao cho BM = CN. Nối MN cắt BC ở D. Chứng minh OD là phân giác của góc MON.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) Theo giả thiết $\widehat{xOa} = 30^o$ và $\widehat{xOb} = 60^o$ nên tia Oa nằm giữa hai tia Ox và Ob và $\widehat{xOa} = \frac{1}{2}\widehat{xOb}$ nên Oa là tia phân giác của góc xOb.

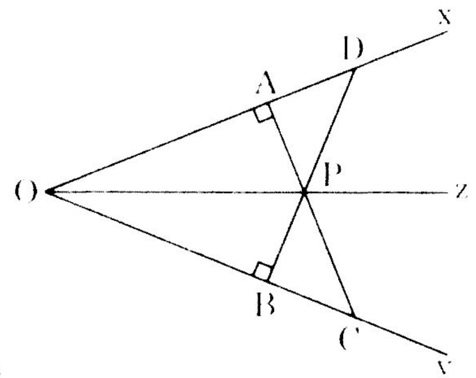
b) Tia Oc nằm trong góc x'Ob dễ dàng chứng minh được $\widehat{bOc} = \widehat{cOx'} = 60^o \Rightarrow$ Oc là phân giác của góc bOx'.



Hình 56

2. a) P thuộc tia phân giác của $\widehat{xOy}$ nên PA = PB (tính chất của tia phân giác của 1 góc); $\hat{A} = \hat{B} = 90^0$; $\widehat{APD} = \widehat{BPC}$ (2 góc đối đỉnh).

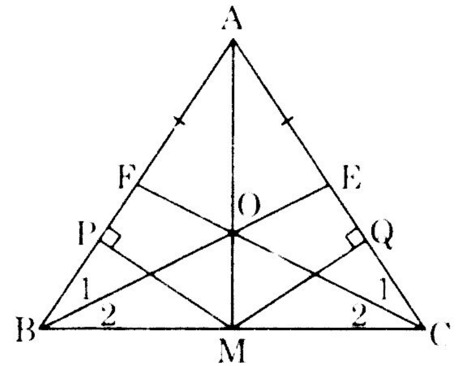
Vậy ΔPAD = ΔPBC (g.c.g) ⇒ PC = PD.



Hình 57

b) Xét ΔAOP và ΔBOP có $\hat{A} = \hat{B} = 90^0$; cạnh huyền PO chung và PA = PB nên ΔAOP = ΔBOP (cạnh huyền, cạnh góc vuông). Suy ra $\widehat{APO} = \widehat{BPO}$ mà $\widehat{APO} = \widehat{CPz}$ và $\widehat{BPO} = \widehat{DPz}$. Do đó $\widehat{CPz} = \widehat{DPz}$. Vậy Pz là phân giác của $\widehat{CPD}$.

3. Kẻ MP ⊥ AB và MQ ⊥ AC.

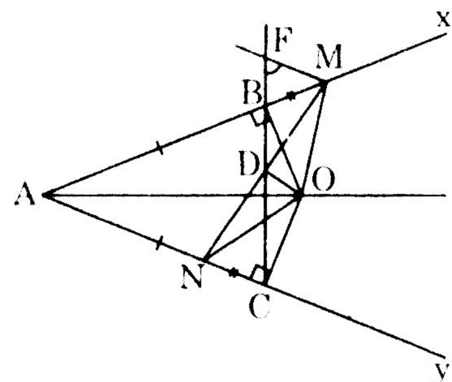


Hình 58

• Xét ΔABE và ΔACF có AE = AF; AB = AC; $\widehat{BAC}$ chung, vậy ΔABE = ΔACF (c.g.c), suy ra $\hat{C}_1 = \hat{B}_1$ mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (tính chất tam giác cân) nên $\hat{B}_2 = \hat{C}_2$. ΔOBC có $\hat{B}_2 = \hat{C}_2$ nên ΔOBC cân, suy ra OB = OC.

• Xét ΔOAB và ΔOAC có OA chung, OB = OC; AB = AC nên ΔOAB = ΔOAC (c.c.c), suy ra $\widehat{OAB} = \widehat{OAC}$. Vậy AO là phân giác của $\widehat{BAC}$ hay AM là phân giác của $\widehat{BAC}$, nên M cách đều AB và AC, tức MP = MQ.

4. a) Xét ΔOAB và ΔOAC có $\hat{B} = \hat{C} = 90^0$, OA chung, AB = AC (giả thiết). Vậy ΔOAB = ΔOAC (cạnh huyền, cạnh góc vuông). Suy ra $\widehat{OAB} = \widehat{OAC}$. Vậy AO là tia phân giác của $\widehat{xAy}$;



Hình 59

b) OB = OC do ΔOAB = ΔOAC); $\widehat{OBM} = \widehat{OCN} = 90^0$ (giả thiết). BM = CN (giả thiết) nên ΔOBM = ΔOCN (c.g.c) suy ra OM = ON.

• Từ M kẻ đường thẳng song song với Ay cắt CB tại F.

MF // Ay nên $\widehat{MFC} = \widehat{NCF}$; $\widehat{DMF} = \widehat{DNC}$. Ta có: AB = AC nên ΔABC cân ⇒ $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ mà $\widehat{ABC} = \widehat{FBM}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{FBM} = \widehat{ACB} = \widehat{MFC}$, suy ra ΔMBF cân, do đó MB = MF. Xét ΔDMF và ΔDNC có MF = NC (cùng bằng MB); $\widehat{MFC} = \widehat{NCF}$; $\widehat{DMF} = \widehat{DNC}$ nên ΔDMF = ΔDNC (g.c.g), do đó DM = DN.

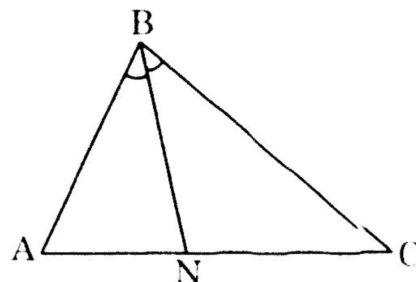
• Xét ΔODM và ΔODN có DM = DN; OM = ON; chung OD nên ΔODM = ΔODN (c.c.c), suy ra $\widehat{MOD} = \widehat{NOD}$. Vậy OD là phân giác của $\widehat{MON}$.

§6. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đường phân giác của tam giác

• Tia phân giác của góc B cắt cạnh đối diện AC tại N thì đoạn thẳng BN gọi là *đường phân giác* (xuất phát từ đỉnh B) của ΔABC.



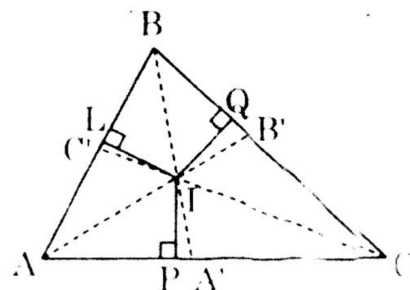
Hình 60

• Như vậy mỗi tam giác có ba đường phân giác.

• Trong tam giác cân, đường phân giác xuất phát từ đỉnh đối diện với cạnh đáy cũng là trung tuyến ứng với cạnh đáy.

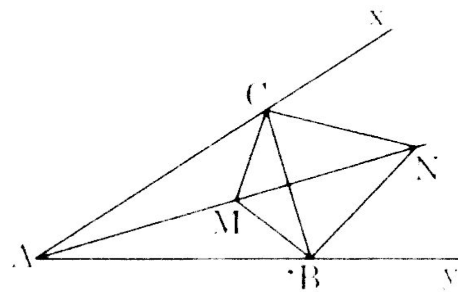
2. Tính chất ba đường phân giác của tam giác

Ba đường phân giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó. I là giao điểm của các đường phân giác AA', BB', CC': IL = IP = IQ (h.61)



Hình 61

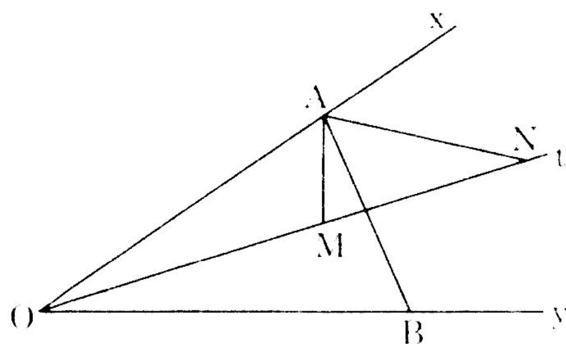
Ví dụ 1. Gọi M là điểm cách đều ba cạnh của tam giác ABC, N là giao điểm của hai tia phân giác của các góc ngoài tại B và C. Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.



Hình 62

Giải. Vì M cách đều ba cạnh của ΔABC nên M nằm trên tia phân giác của góc A. Vì N nằm trên tia phân giác của góc CBy, nên N cách đều hai tia By và BC; N nằm trên tia phân giác của góc BCx nên N cách đều hai tia Cx và By. Từ đó suy ra M và N là các điểm cách đều hai tia Ax và By. Nên M và N nằm trên tia phân giác của góc A, suy ra A, M, N thẳng hàng.

Ví dụ 2. Cho góc xOy; lấy điểm A trên tia Ox và điểm B trên tia Oy. Hãy xác định những điểm trên tia phân giác Ot của góc xOy sao cho điểm đó cách đều Ox, Oy và đoạn thẳng AB.



Hình 63

Giải. Ta phải tìm trên tia Ot những điểm cách đều: AO và AB; Ax và AB.

Điểm cách đều AO và AB là điểm M, giao điểm của tia phân giác góc OAB và Ot. Điểm cách đều Ax và AB là điển N, giao điểm của tia phân giác góc BAx và Ot.

Vậy M, N là những điểm phải tìm.

II. BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC, các tia phân giác của các góc $\hat{B}$ và $\hat{C}$ cắt nhau ở I, $\widehat{BIC} = 135^0$. Kẻ IE ⊥ AB và IF ⊥ AC. Chứng minh ΔIEF là tam giác vuông cân.

2. Cho tam giác ABC. Đường thẳng xy // BC cắt 2 cạnh AB và AC theo thứ tự tại M và N sao cho BM + CN = MN. Chứng minh đường thẳng xy đi qua giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC.

3. Cho tam giác vuông ABC có $\hat{A} = 90^0$, $\hat{B} = 2\hat{C}$. Kẻ tia Bx nằm giữa hai tia BA và BC sao cho $\widehat{ABx} = 20^0$, Bx cắt AC ở E. Kẻ tia Cy nằm giữa

hai tia CA và CB sao cho $\widehat{ACy} = 10^0$, Cy cắt AB ở F, hai tia Bx và Cy cắt nhau tại D. Chứng minh tam giác DEF là tam giác cân.

4. Cho tam giác ABC, $\hat{B} = 2\hat{C}$. Kẻ đường phân giác BD. Từ D kẻ DE // BC. Chứng minh:

a) BD = DC; b) EB = ED; c) Để có DA = DC = BD thì tam giác ABC là tam giác gì?

5. Cho tam giác cân ABC. Từ A kẻ xx' song song với BC. Kẻ đường phân giác của $\hat{B}$ và $\hat{C}$, chúng cắt xx' tại E và E'. Nối E với C. Chứng minh:

a) Ax là tia phân giác của góc ngoài tại A;

b) AE = AE';

c) EC là đường phân giác góc ngoài tại C;

d) Tam giác CEE' là tam giác vuông.

6. Cho tam giác ABC, $\hat{A} = 100^0$, $\hat{B} = 50^0$. Đường phân giác của góc B cắt đường phân giác ngoài của góc C tại O.

a) Tính các góc của tam giác BOC;

b) Nối OA chứng minh OA là đường phân giác ngoài của góc A, suy ra số đo của góc AOB.

7. Cho một tam giác có độ dài các cạnh là a, b, c, đồng thời a – b = b – c. M là giao điểm các đường trung tuyến, P là giao điểm của các đường phân giác của các góc trong của tam giác đã cho. Chứng minh rằng MP song song với cạnh có độ dài là b.

(Trích đề thi HSG toán cấp 2, 1976 - 1977)

8. Cho tam giác ABC. Từ trung điểm D của cạnh BC kẻ đường vuông góc với đường phân giác của góc A cắt AB và AC tại M và N.

a) Chứng minh rằng BM = CN

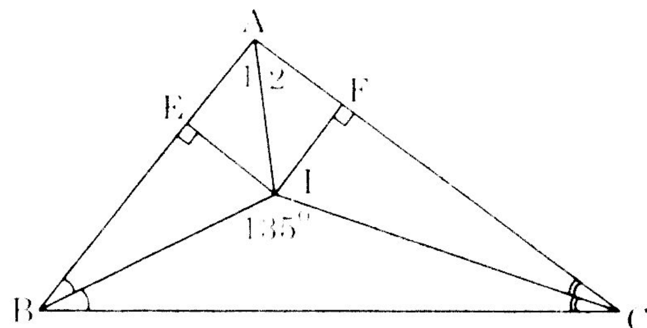
b) Đặt AB = c, AC = b. Tính AM và BM theo b và c.

(Trích đề thi các lớp chuyên cấp 3, 1973)

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. • ΔABC có BI và CI là phân giác của các góc B và C nên AI là phân giác của $\hat{A}$, vậy $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. (1)

• Xét ΔIBC có: $\widehat{IBC} + \widehat{ICB} = 180^0 - \widehat{BIC} = 180^0 - 135^0 = 45^0$, do đó $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 2(\widehat{IBC} + \widehat{ICB}) = 2.45^0 = 90^0$. Suy ra $\widehat{BAC} = 90^0$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{1}{2}\hat{A}$

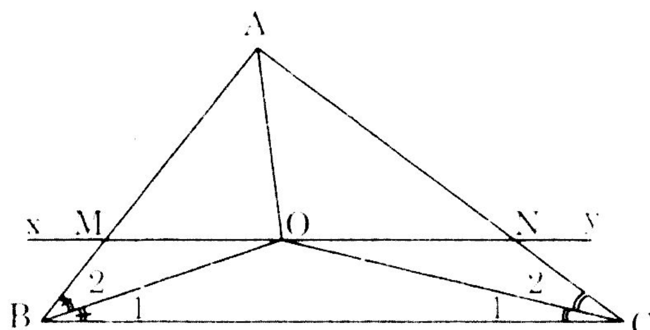


Hình 16

$= 45^0$. Lại có $\hat{E} = \hat{F} = 90^0$, do đó $\widehat{EIA} = 45^0$; $\widehat{FIA} = 45^0 \Rightarrow \widehat{EIF} = 90^0 \Rightarrow$ ΔIEF vuông tại I.

• AI là tia phân giác của $\hat{A}$ nên I cách đều AB và AC $\Rightarrow$ IE = IF. Từ các chứng minh trên suy ra ΔIEF vuông cân.

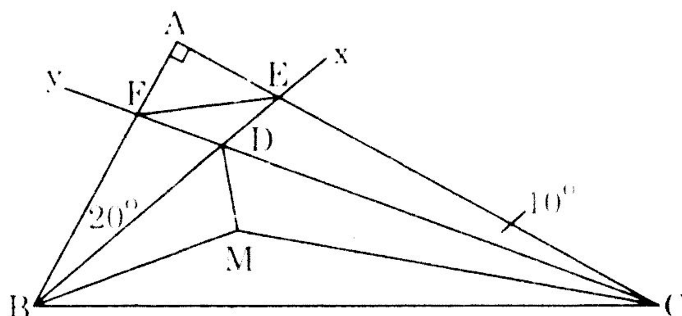
2. Trên MN, lấy điểm O sao cho OM = MB ta được ΔMBO cân, suy ra $\widehat{MOB} = \hat{B}_2$ mà $\widehat{MOB} = \hat{B}_1$ (do xy // BC và 2 góc sole trong) nên $\hat{B}_2 = \hat{B}_1$. Vậy BO là phân giác của $\hat{B}$. (1)



Hình 65

Theo giả thiết BM + CN = MN hay BM + CN = OM + ON mà MB = MO nên CN = ON. Chứng minh tương tự trên ta có CO là phân giác của $\hat{C}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra O là giao điểm các đường phân giác của $\hat{B}$ và $\hat{C}$; Theo tính chất ba đường phân giác thì AO là phân giác của $\hat{A}$. Vậy xy đi qua giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC.

3. • ΔABC có $\hat{A} = 90^0$ (gt) nên $\hat{B} + \hat{C} = 90^0$, mà $\hat{B} = 2\hat{C}$, do đó $2\hat{C} + \hat{C} = 90^0$ hay $3\hat{C} = 90^0$, $\hat{C} = 30^0$, và $\hat{B} = 60^0$, lại có $\widehat{ABx} = 20^0$ (gt) nên $\widehat{DBC} = 40^0$, $\widehat{ACy} = 10^0$ (gt) nên $\widehat{DCB} = 20^0$. $\widehat{BDF}$ là góc ngoài ΔDBC nên



Hình 66

$\widehat{FDB} = \widehat{DBC} + \widehat{DCB} = 40^o + 20^o = 60^o$. Chứng minh tương tự ta có $\widehat{EDC} = 60^o$. Vì $\widehat{EDC}$ kề bù $\widehat{CDB}$ nên $\widehat{CDB} = 120^o$.

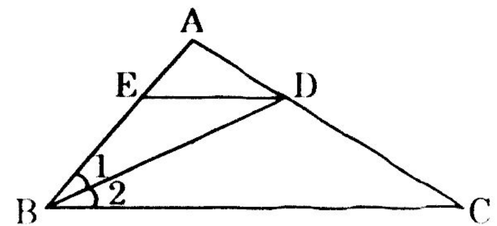
• Kẻ các tia phân giác của các góc của ΔDBC chúng cắt nhau tại M, ta có $\widehat{MDB} = \widehat{MDC} = 60^o$, $\widehat{MBD} = \frac{1}{2}\widehat{DBC} = \frac{1}{2}.40^o = 20^o = \widehat{DBF}$ và $\widehat{MCD} = \frac{1}{2}.\widehat{BCD} = \frac{1}{2}.20^o = 10^o = \widehat{DCE}$. ΔMBD và ΔFBD có $\widehat{FBD} = \widehat{MBD}$; BD chung; $\widehat{BDF} = \widehat{BDM} = 60^o$.

Vậy ΔMBD = ΔFBD (g.c.g), suy ra DF = DM (1)

Chứng minh tương tự ta có DE = DM (2).

Từ (1) và (2) suy ra DE = DF. Vậy ΔDEF cân.

4. (h.67) a) BD là tia phân giác của góc B nên BD phải cắt cạnh AC (D nằm giữa hai điểm A và C). ΔBDC: $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ mà $\hat{B} = 2\hat{C}$ nên $\hat{C} = \frac{\hat{B}}{2}$, $\hat{B}_2 = \frac{1}{2}\hat{B} \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{C}$.



Hình 67

Do đó ΔBDC là tam giác cân đỉnh D nên BD = DC;

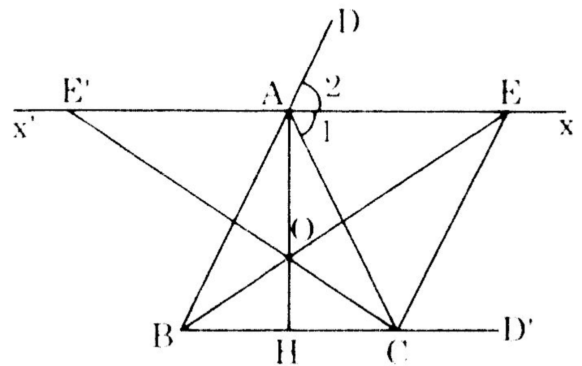
b) Đường thẳng DE // BC [illegible] cắt cạnh AB. Vì DE // BC $\Rightarrow \widehat{EDB} = \hat{B}_2$ mà $\hat{D}$ là góc ngoài của ΔDBC $\Rightarrow \hat{D} = \hat{B}_2 + \hat{C}$ mà $\hat{C} > 0 \Rightarrow \hat{D} > \hat{B}_2$ $\Rightarrow \hat{D} > \widehat{EDB}$, vậy tia ED nằm giữa tia DA và DB, E là điểm nằm giữa hai điểm A và B hay DE cắt cạnh AB.

Theo chứng minh trên $\widehat{EDB} = \hat{B}_2$ mà $\hat{B}_2 = \hat{B}_1 \Rightarrow$ ΔEDB cân ⇒ EB = ED.

c) Muốn có DA = DC khi đó tam giác BAC có BD vừa là trung tuyến vừa là đường phân giác, vậy ΔBAC là tam giác cân. DA = DC = BD ⇒ BD = $\frac{1}{2}$AC. Vậy BAC là tam giác vuông đỉnh B.

[illegible]ại: Muốn có DA = DC = BD thì tam giác BAC là tam giác vuông cân đỉnh B.

5. (h.68) a) x'x // BC nên $\hat{A}_1 = \hat{C}$ (so le trong), $\hat{B} = \hat{A}_2$ (đồng vị), mà $\hat{B} = \hat{C}$ suy ra $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, tia Ax nằm giữa hai tia AC và AD nên Ax là tia phân giác góc ngoài ở đỉnh A.



Hình 68

b) Giao điểm của các đường phân giác là O nằm trên đường cao AH, mà E'E // BC ⇒ AH ⊥ EE'. Hai tam giác vuông AOE và AOE' bằng nhau (HS tự chứng minh) ⇒ AE = AE'.

c) E là giao điểm của hai đường phân giác góc trong B và góc ngoài ở đỉnh A. Vậy EC là đường phân giác góc ngoài ở đỉnh C (chứng minh dễ dàng);

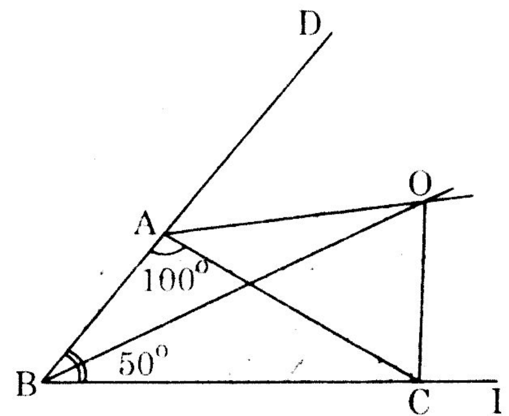
d) $\hat{C}$ và $\widehat{ACD'}$ là hai góc kề bù, vậy hai tia phân giác của chúng vuông góc với nhau nên ΔECE' vuông.

6. (h.69). a) $\hat{C} = 180^o - (100^o + 50^o) = 30^o$

$\widehat{ACI} = 150^o$ mà OC là tia phân giác, vậy $\widehat{ACO} = \dfrac{150^o}{2} = 75^o$. Tia AC nằm giữa hai tia CB và CO nên $\widehat{BCO} = \hat{C} + \widehat{ACO} = 30^o + 75^o = 105^o$

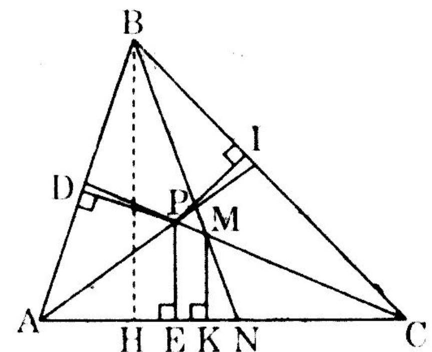
$\Rightarrow \widehat{BOC} = 180^o - (105^o + 25^o) = 50^o$;

b) HS tự giải.



Hình 69

7. Giả sử có tam giác ABC đã cho (h.70) trong đó BN là trung tuyến, M là giao điểm của các đường trung tuyến P là giao điểm của các đường phân giác trong. Ta phải chứng minh PM // AC. Từ P kẻ PD, PE, PI theo thứ tự vuông góc với cạnh AB, AC, BC.

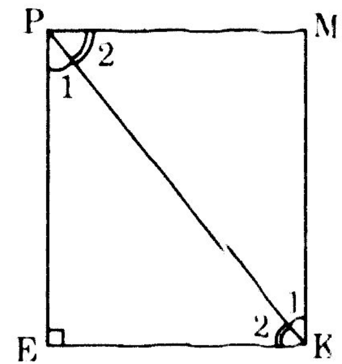


Hình 70

Do P là giao điểm của đường phân giác ⇒ PD = PE = PI = r (r là một số nhất định. Dễ dàng có $S_{ABC} = \dfrac{(a + b + c)r}{2}$

Kẻ MK ⊥ AC, không khó khăn lắm ta chứng minh được $S_{AMC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$

$\Rightarrow \frac{b.MK}{2} = \frac{1}{3}.\frac{(a+b+c)r}{2}$



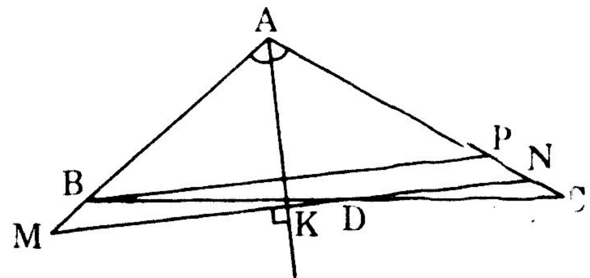
Hình 71

Theo giả thiết a − b = b − c ⇒ 2b = a + c ⇒ MK = r = PE

Ta có PE = MK và PE // MK (vì cùng vuông góc với EK) ⇒ $\widehat{K}_1 = \widehat{P}_1$ (so le trong) ⇒ $\widehat{K}_2 = \widehat{P}_2$ (vì hai góc này cùng phụ với hai góc bằng nhau) ⇒ PM // EK hay PM // AC (đpcm).

(Sau này khi học lớp 8 dễ dàng chứng minh PMKE là hình bình hành và suy ra PM // AC).

8. a) Gọi K là giao điểm của MN và đường phân giác của góc A (h.72). Từ B kẻ đường thẳng song song với MN nó cắt AC tại P. Dễ dàng chứng minh ΔAMN là tam giác cân ⇒ AM = AN. Tương tự ΔABP là tam giác cân ⇒ AB = AP ⇒ BM = PN (1).



Hình 72

Trong ΔCBP, D là trung điểm của BC và DN // BP ⇒ N là trung điểm của PC ⇒ PN = CN (2). Từ (1) và (2) ⇒ BM = CN;

b) Ta phải chứng minh hai trường hợp: AB < AC; AB > AC

• Trường hợp thứ nhất: AB < AC (h.72)

Khi đó ta có PC = b − c ⇒ $BM = NC = \frac{PC}{2} = \frac{b-c}{2}$ ⇒ AM = AB + BM

$= c + \frac{b-c}{2} = \frac{b+c}{2}$

• Trường hợp thứ hai: AB > AC. Cũng chứng minh tương tự ta có

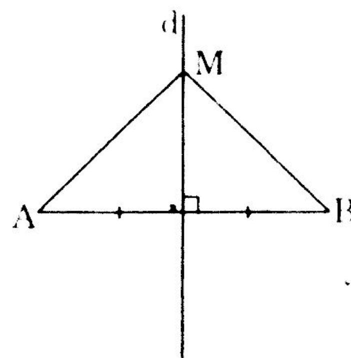
$AM = \frac{b+c}{2}$, $BM = \frac{c-b}{2}$.

§7. TÍNH CHẤT ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đường trung trực của một đoạn thẳng là đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

Ở *hình 73* d là đường trung trực của đoạn thẳng AB.



Hình 73

2. Tính chất của đường trung trực

- *Định lí thuận.* Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai nút của đoạn thẳng đó.

$M \in (d) \Rightarrow MA = MB$

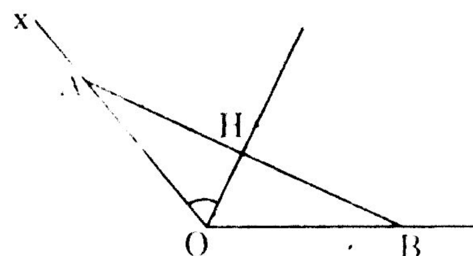
- *Định lí đảo.* Điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó

$MA = MB \Rightarrow M \in (d)$

- Từ định lí thuận và đảo ta có: Tập hợp các điểm cách đều hai mút của đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó

- Ứng dụng: Có thể vẽ đường trung trực của đoạn thẳng bằng thước thẳng và compa.

Ví dụ 1. Cho góc xOy (khác góc bẹt) lấy các điểm A và B lần lượt trên tia Ox và Oy sao cho OA = OB. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB. Chứng minh rằng OH là đường trung trực của đoạn thẳng AB.



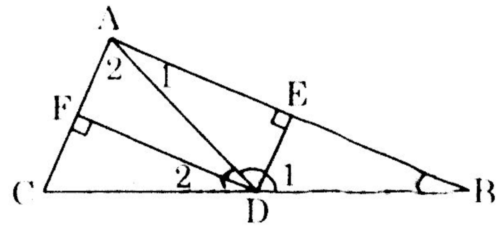
Hình 74

Giải. Ta có OA = OB nên O nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB. Ta lại có HA = HB (vì H là trung điểm của đoạn thẳng). Vậy OH là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông ở A các đường trung trực của các cạnh góc vuông cắt nhau tại D. Chứng minh rằng ba điểm B, C, D thẳng hàng.

Giải. Hai tam giác DEB và DEA bằng nhau (vì EB = EA; ED chung; cùng có góc vuông ở E); do đó $\hat{B} = \hat{A}_1$.

Hai tam giác DFA và DFC bằng nhau (vì FA = FC; FD chung; cùng có góc vuông ở F); do đó $\hat{C} = \hat{A}_2$.



Hình 75

Từ tam giác DAB ta có:

$$\hat{D}_1 = 180^\circ - 2.\hat{A}_1 \text{ (vì } \hat{A}_1 + \hat{B} = 2\hat{A}_1\text{)}.$$

Từ tam giác DAC ta có:

$$\hat{D}_2 = 180^\circ - 2\hat{A}_2 \text{ (vì } \hat{A}_2 + \hat{C} = 2\hat{A}_2\text{)}.$$

Do đó $\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 2.180^\circ - 2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) = 360^\circ - 2.90^\circ$ (vì $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ$, theo giả thiết) tức là $\widehat{BDC} = 180^\circ$.

Vậy ba điểm B, D, C thẳng hàng.

II. BÀI TẬP

1. Cho hai điểm A và C ở ngoài đường thẳng xy (khoảng cách từ A và C đến xy không bằng nhau). Xác định các điểm B và D sao cho xy là trung trực của các đoạn thẳng AB và CD.

a) Chứng minh các đường thẳng AC, BD và xy đồng quy;

b) Chứng minh các đường thẳng AD, BC và xy đồng quy.

2. Cho ΔABC ($AB \neq AC$). Trên tia CA đặt đoạn CE = AB. Hai đường trung trực của các đoạn thẳng AC và BE cắt nhau tại O. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của góc BAC.

Chứng minh rằng nếu E thuộc tia đối của tia CA và CE = AB thì AO là tia phân giác của góc kề bù với góc BAC.

3. Cho tam giác ABC, đường cao $AH \perp BC$. Xác định các điểm E và F sao cho AB là trung trực của HE và AC là trung trực của HF.

Chứng minh rằng:

a) Nếu $\hat{A} = 90^\circ$ thì ba điểm E, A, F thẳng hàng;

b) Nếu $\hat{A} \neq 90^\circ$, các góc B và C đều nhọn, nối EF cắt AB và AC ở M và N thì HA là tia phân giác của góc MHN;

c) Nếu $\hat{B}$ tù (hoặc $\hat{C}$ tù) thì HA là tia phân giác của góc nào? Vì sao?

4. Cho hai điểm A và D nằm trên đường trung trực AI của đoạn thẳng BC. D nằm giữa hai điểm A và I, I là điểm nằm trên BC.

a) Chứng minh: AD là tia phân giác của góc BAC;

b) Chứng minh: $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$.

5. Hai điểm M và N nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB, N là trung điểm của đoạn thẳng AB. Trên tia đối của tia NM xác định M' sao cho NM' = NM.

a) Chứng minh AB là đường trung trực của đoạn thẳng MM';

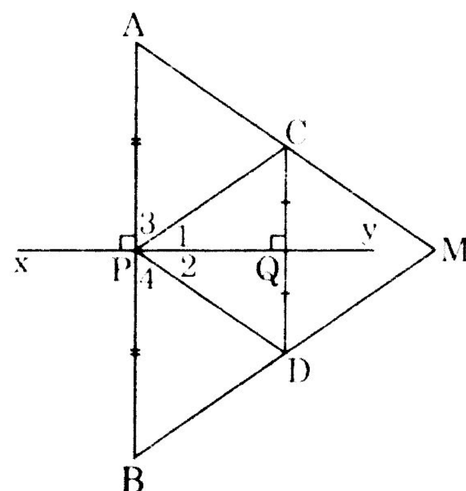
b) M'A = MB = M'B = MA.

6. Cho tam giác ABC góc A tù, $\hat{B} > \hat{C}$. Dựng trung trực của cạnh BC cắt AC tại D. Đường thẳng BD cắt đường cao AH của ABC tại E. Chứng minh $\widehat{CAH} = \widehat{AED}$.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) Nối CP, DP, ΔPQC và ΔPQD có PQ chung, $\widehat{PQC} = \widehat{PQD} = 90^0$, QC = QD (gt) nên $\Delta PQC = \Delta PQD$ (c.g.c) suy ra PC = PD và $\hat{P}_1 = \hat{P}_2$ mà $\hat{P}_1 + \hat{P}_3 = \widehat{QPA} = 90^0 = \widehat{QPB} = \hat{P}_2 + \hat{P}_4$, nên $\hat{P}_3 = \hat{P}_4$.

Δ CPA và ΔDPB có PC = PD; $\hat{P}_3 = \hat{P}_4$; PA = PB (gt) nên Δ CPA = ΔDPB (c.g.c), suy ra: $\hat{A} = \hat{B}$.



Hình 76

Hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại M. Xét ΔMAB có $\hat{A} = \hat{B}$ nên ΔMAB cân, do đó MA = MB. Điểm M cách đều A và B nên M thuộc trung trực của đoạn thẳng AB, mà xy là trung trực của AB. Vậy M thuộc xy, suy ra ba đường thẳng AC, BD và xy đồng quy tại M;

b) Nối AD và BC cắt nhau tại N. Theo câu a) thì M thuộc trung trực của AB nên MA = MB, do đó ΔMAB cân, suy ra $\widehat{MAB} = \widehat{MBA}$; cũng do M

thuộc trung trực của CD nên MC = MD; ΔMAD và ΔMBC có MA = MB; MD = MC; $\widehat{CMD}$ chung nên ΔMAD = ΔMBC (c.g.c), suy ra $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ mà $\widehat{MAB} = \widehat{MBA}$ nên $\hat{B}_2 = \hat{A}_2$. ΔNAB có $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ nên ΔNAB cân, do đó NA = NB, suy ra N thuộc trung trực của AB. Vậy N thuộc xy, suy ra 3 đường thẳng AD, BC, xy đồng quy.

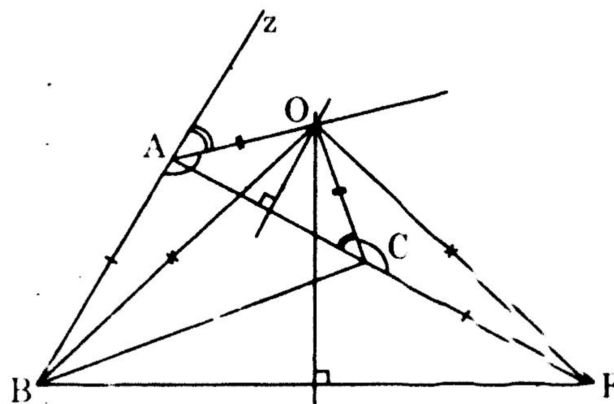
Hình 77

2. Do O thuộc trung trực của AC (gt) nên OA = OC, và O thuộc trung trực của BE nên OB = OE, theo giả thiết ta có AB = EC. Suy ra ΔOAB = ΔOCE (c.c.c), do đó $\widehat{ACO} = \widehat{OAB}$ (1) OA = OC nên ΔOAC cân, suy ra $\widehat{ACO} = \widehat{CAO}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OAB} = \widehat{OAC}$. Vậy AO là phân giác của $\widehat{BAC}$.

Hình 78

Xét trường hợp điểm E thuộc tia đối của tia CA:

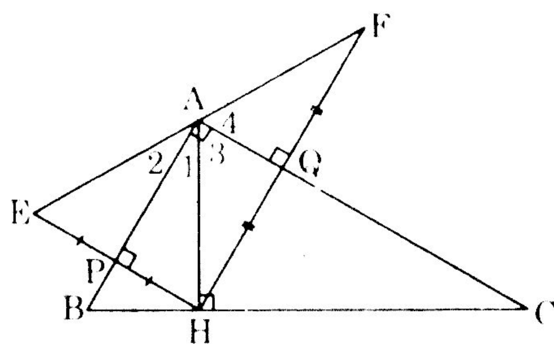
Chứng minh tương tự trên ta có ΔOAB = ΔOCE, suy ra $\widehat{OAB} = \widehat{OCE}$ mà $\widehat{OAB} + \widehat{OAz} = 180^\circ = \widehat{OCE} + \widehat{OCA}$, do đó $\widehat{OAz} = \widehat{OCA}$. Mặt khác $\widehat{OCA} = \widehat{OAC}$ nên $\widehat{OAz} = \widehat{OAC}$. Vậy O thuộc tia phân giác của góc CAz kề bù với góc BAC.



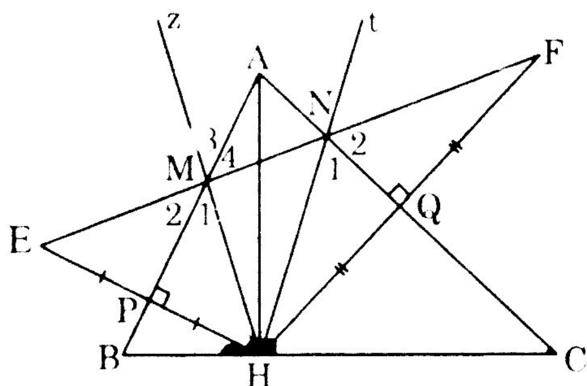
Hình 79

3. a) $\widehat{A} = 90^0$

ΔAPE và ΔAPH có AP chung, $\widehat{APE} = \widehat{APH} = 90^0$, PE = PH nên $\Delta APE = \Delta APH$ (c.g.c), suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$. Chứng minh tương tự ta có $\widehat{A_3} = \widehat{A_4}$ mà $\widehat{A_1} + \widehat{A_3} = \widehat{BAC} = 90^0$ nên $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} + \widehat{A_4} = 180^0$ hay $\widehat{EAF}$ là góc bẹt. Vậy 3 điểm E, A, F thẳng hàng;



Hình 80



Hình 81

b) ΔMPE và ΔMPH có MP chung, $\widehat{MPE} = \widehat{MPH} = 90^0$, PE = PH nên $\Delta MPE = \Delta MPH$ (c.g.c) suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$. Kẻ tia Mz là tia đối của tia MH ta có $\widehat{M_3} = \widehat{M_1}$ và $\widehat{M_4} = \widehat{M_2}$. Do đó $\widehat{M_3} = \widehat{M_4}$, suy ra MA là tia phân giác của $\widehat{NMz}$. Theo tính chất của tia phân giác thì A cách đều hai tia Mz và MN hay A cách đều Hz và MN. Chứng minh tương tự ta có A cách đều tia Ht và MN. Từ các chứng minh trên suy ra A cách đều hai tia Hz và Ht. Vậy A thuộc tia phân giác của $\widehat{MHN}$.

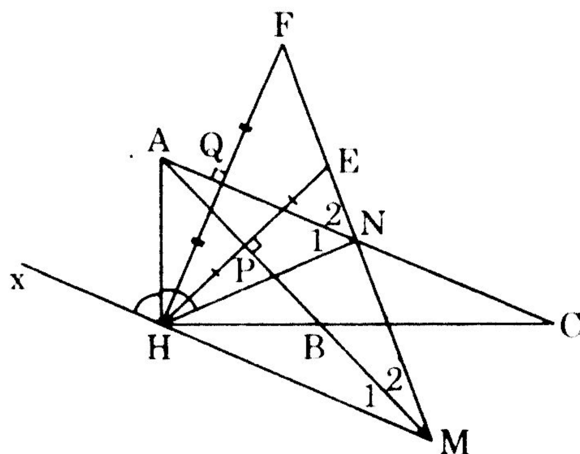
c) $\widehat{B}$ là góc tù:

Chứng minh tương tự trên ta có

– A cách đều hai tia NF và NH, hay A cách đều hai tia MF và NH

– A cách đều hai tia MH và MN hay A cách đều 2 tia Hx và MF

Từ các chứng minh trên suy ra A cách đều hai tia Hx và HN. Vậy A thuộc tia phân giác của $\widehat{xHN}$ (tia Hx là tia đối của tia HM).



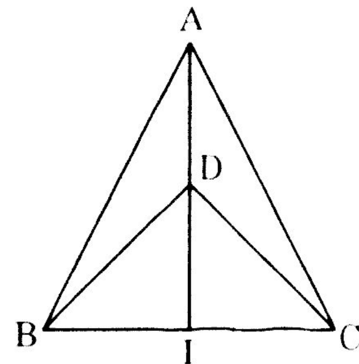
Hình 82

Học sinh tự chứng minh trường hợp $\widehat{C}$ là góc tù.

4. (h.83). GT: AI là đường trung trực của đoạn thẳng BC. D cùng nằm trên AI.

KL: AD là tia phân giác của góc BAC:

$\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$.



Hình 83

Chứng minh:

a) Xét hai tam giác ABI và ACI chúng có AI chung.

$\widehat{AIC} = \widehat{AIB} = 1v$

IB = IC

(giả thiết cho AI là đường trung trực của đoạn thẳng BC).

Vậy $\Delta ABI = \Delta ACI$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{CAI}$. Mặt khác I là trung điểm của cạnh BC nên tia AI nằm giữa hai tia AB và AC $\Rightarrow$ AD là tia phân giác của góc BAC;

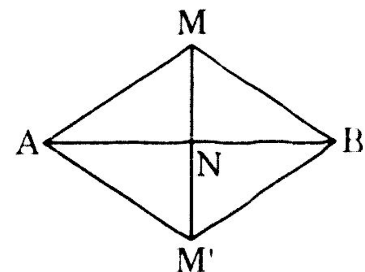
b) Xét hai tam giác ABD và ACD chúng có cạnh AD chung, cạnh AB = AC (vì AI là đường trung trực của đoạn thẳng BC) $\widehat{BAI} = \widehat{CAI}$ (chứng minh trên), vậy $\Delta ABD = \Delta ACD \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACD}$.

5. (h.84) GT – MN nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB; N là trung điểm của AB

– M' nằm trên tia đối của tia NM và NM' = NM.

KL: AB là đường trung trực của đoạn thẳng MM'.;

– AM' = MB = M'B = MA.



Hình 84

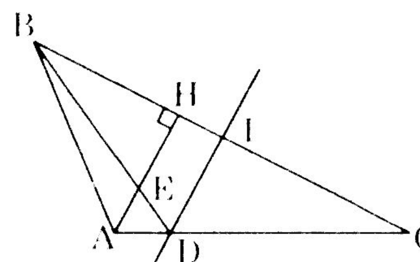
Chứng minh:

a) Ta có AB ⊥ MM' (vì MN là đường trung trực của đoạn thẳng AB nên MN ⊥ AB). Mặt khác N là trung điểm của MM' (vì M' nằm trên tia đối của tia NM và NM = NM'). Vậy AB là đường trung trực của đoạn thẳng MM';

b) Theo giả thiết MM' là đường trung trực của đoạn thẳng AB nên MA = MB, M'A = M'B, ta lại có AB là đường trung trực của đoạn thẳng MM' nên MA = M'B từ đó suy ra: M'A = MB = M'B = MA.

6. DI ⊥ BC (vì DI là đường trung trực của cạnh BC);

AH ⊥ BC (vì AH là đường cao của ABC) nên DI // AH (định lí).



Hình 85

Vậy $\widehat{CAH} = \widehat{CDI}$ (đồng vị).

$\widehat{AED} = \widehat{BDI}$ (so le trong)

mà $\widehat{BDI} = \widehat{CDI}$ (vì DI là đường trung trực của BC).

Do đó $\widehat{CAH} = \widehat{AED}$.

§8. TÍNH CHẤT CỦA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC

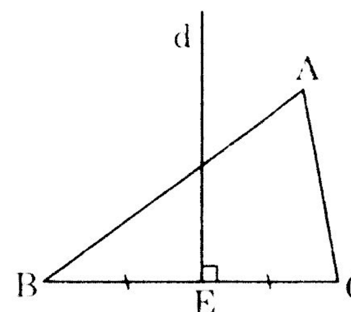
I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đường trung trực của tam giác

• Trong một tam giác đường trung trực của mỗi cạnh gọi là đường trung trực của tam giác đó.

• Mỗi tam giác có 3 đường trung trực ở hình 86, d gọi là đường trung trực ứng với cạnh BC của ΔABC.

• Trong một tam giác cân đường trung trực của cạnh đáy đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh đáy.

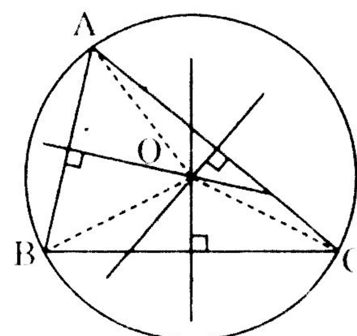


Hình 86

2. Tính chất ba đường trung trực của tam giác

• Định lí. Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác.

• Chú ý. Gọi O là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác ABC thì O cách đều ba đỉnh của tam giác (OA = OB = OC) nên có một đường tròn tâm O đi qua 3 đỉnh A, B, C. Ta gọi đường tròn này là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

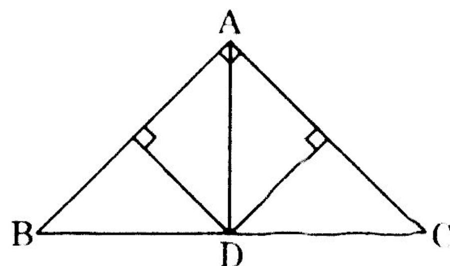


Hình 87

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, vuông ở A; các đường trung trực của các cạnh AB, AC cắt nhau tại D. Chứng minh rằng D là trung điểm của cạnh BC.

Giải

(h.88) Vì D là giao điểm của các đường trung trực của các cạnh AB và AC nên hai tam giác DAB và DAC là cân và các góc ở đáy của mỗi tam giác đó bằng nhau:



Hình 88

$\widehat{DBA} = \widehat{DAB}$ và $\widehat{DAC} = \widehat{DCA}$.

Theo tính chất góc ngoài của tam giác, ta có:

$\widehat{ADB} = \widehat{DAC} + \widehat{DCA}$;

$\widehat{ADC} = \widehat{DAB} + \widehat{DBA}$.

Do đó $\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = \widehat{DAC} + \widehat{DCA} + \widehat{DAB} + \widehat{DBA} = 180^0$; từ đó suy ra ba điểm B, D, C thẳng hàng. Hơn nữa, vì DB = DC nên D là trung điểm của BC.

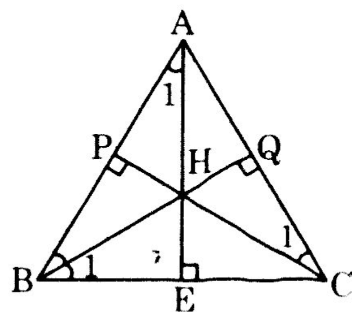
Ví dụ 2. Chứng minh rằng một tam giác là đều thì điều kiện cần và đủ là giao điểm của các đường phân giác trong và giao điểm của ba đường trung trực của tam giác đó trùng nhau.

Giải

Giả sử có ΔABC và H là giao điểm của ba đường phân giác. Ta phải chứng minh hai phần:

Phần thuận: ΔABC đều ⇒ H là giao điểm của 3 đường trung trực.

Phần đảo: H là giao điểm của 3 đường trung trực ⇒ ΔABC đều.



Hình 89

• *Phần thuận:* ΔABC đều thì đường phân giác cũng là đường trung trực nên H là giao điểm của 3 đường phân giác cũng là giao điểm của 3 đường trung trực.

• *Phần đảo:* H là giao điểm của 3 đường phân giác. Từ H kẻ HE ⊥ BC, HQ ⊥ AC, HP ⊥ AB ⇒ HE = HQ = HP (tính chất ba đường phân giác của tam giác).

Nếu H cũng là giao điểm 3 đường trung trực thì HA = HB = HC. Xét 3 tam giác vuông AHB, BHE, CHQ chúng có: HA = HB = HC, HP = HE = HQ (chứng minh trên). Vậy ΔAHB = ΔBHE = ΔCHQ $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{C}_1$. Suy ra $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ nên ΔABC đều.

II. BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC có cạnh BC cố định, điểm A di động trong mặt phẳng (sao cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng). Đường trung trực của hai cạnh AB và AC cắt nhau ở điểm E. Chứng minh rằng E di động trên một đường thẳng cố định.

2. Cho tam giác ABC, các đường cao BE ⊥ AC và CF ⊥ AB. Chứng minh rằng các đường trung trực của các cạnh của tam giác BEC, của tam giác BFC và đường trung trực của đoạn thẳng EF cùng đi qua 1 điểm.

3. Cho tam giác ABC. Kẻ đường thẳng m_1 đi qua A và song song với BC. Kẻ đường thẳng m_2 đi qua B và song song với AC, m_1 và m_2 cắt nhau tại F. Kẻ đường thẳng m_3 đi qua C và song song với AB, m_3 cắt m_1 và m_2 tại E và G.

Chứng minh rằng giao điểm các đường trung trực của các cạnh ΔEFG cũng là giao điểm các đường cao của ΔABC.

4. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^0$. Đường trung trực của cạnh AB và AC cắt nhau tại I và cắt cạnh BC lần lượt ở D và E.

a) Chứng minh rằng các tam giác ABD và ACE là các tam giác cân;

b) Tính $\widehat{BIC}$.

5. Cho tam giác cân ABC (AB = AC). Trên cạnh AB, AC lần lượt lấy điểm M, điểm N sao cho AM = AN. I là giao điểm của MC và BN. Chứng minh:

a) Tam giác BIC là tam giác cân;

b) AI là đường trung trực của cạnh BC.

6. Cho tam giác ABC, $\hat{A} = 120^0$, $\hat{B} - \hat{C} = 30^0$. Đường trung trực của cạnh BC cắt cạnh AC tại D, cắt tia đối của tia AB tại E.

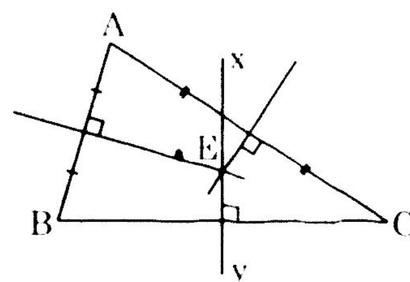
a) Tính các góc của tam giác ABC;

b) Chứng minh $\widehat{EBD} = \widehat{ECD} = \widehat{ADB} = 30^0$;

c) So sánh hai tam giác EDB và EDC.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. E thuộc trung trực của AB nên EA = EB, E thuộc trung trực của AC nên EA = EC. Suy ra EB = EC hay E cách đều B và C cố định. Vậy E thuộc trung trực yx của đoạn thẳng BC cố định.



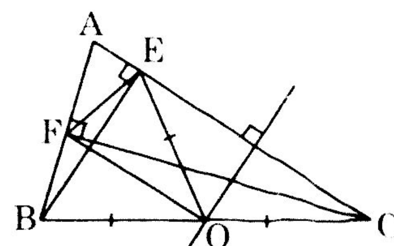
Hình 90

2. Kẻ đường trung trực của cạnh EC cắt BC tại O. Theo tính chất đường trung trực thì OE = OC nên ΔOEC cân, suy ra $\widehat{OCE} = \widehat{OEC}$. Lại có $\widehat{OCE} + \widehat{OBE} = 90^o = \widehat{OEC} + \widehat{OEB}$, nên $\widehat{OEB} = \widehat{OBE}$, do đó ΔOBE cân, suy ra OB = OE mà OE = OC. Vậy OE = OB = OC. Suy ra O là giao điểm 3 đường trung trực của ΔEBC.

• Chứng minh tương tự ta có OF = OB = OC, suy ra O là giao điểm 3 đường trung trực của ΔFBC.

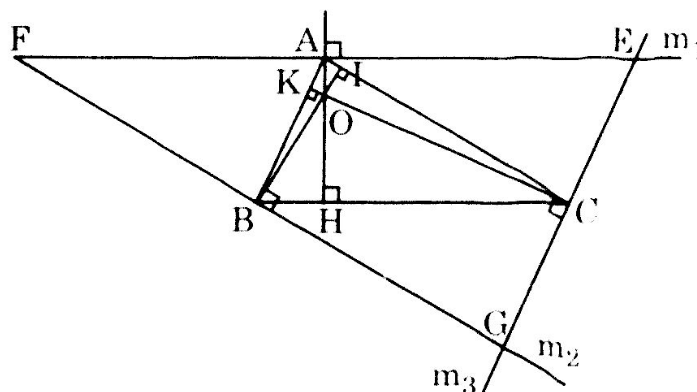
• Từ các chứng minh suy ra OE = OF nên O cũng thuộc đường trung trực của EF.

Vậy các đường trung trực của các cạnh của ΔBEC, của ΔBFC và đường trung trực của EF cùng đi qua trung điểm O của cạnh BC.



Hình 91

3. Xét ΔEAC và ΔBCA có chung cạnh AC; $\widehat{EAC} = \widehat{ACB}$; $\widehat{ECA} = \widehat{CAB}$ (do m_1 // BC; m_3 // AB và là 2 cặp góc so le trong). Vậy ΔEAC = ΔBCA (g.c.g). Suy ra AE = BC (1); CE = AB (2)



Hình 92

Tương tự ta có: AF = BC (3); BF = AC (4)

CG = AB (5); BG = AC (6)

Từ (1) và (3) suy ra AE = AF nên trung trực của EF đi qua A. Mặt khác m_1 // BC nên AH ⊥ m_1 thì AH ⊥ BC.

Chứng minh tương tự ta có BI là trung trực của FG đồng thời là đường cao của ΔABC, và CK là trung trực của EG đồng thời là đường cao của ΔABC.

Vậy O là giao điểm các đường trung trực của ΔEFG đồng thời là giao điểm các đường cao của ΔABC.

4. a) Điểm D nằm trên đường trung trực của AB nên DA = DB. Tam giác ADB cân ở D.

Điểm E nằm trên đường trung trực của AC nên AE = EC.

Tam giác AEC cân ở E.

b) Điểm I là giao điểm của hai đường trung trực của AB và AC, nên:

IA = IB, tam giác AIB cân ở I, suy ra:

$\widehat{AIB} = 180^\circ - 2\widehat{IAB}$

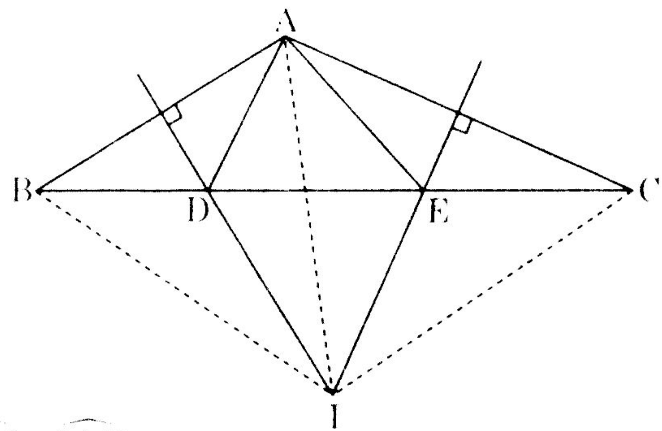
IA = IC, tam giác AIC cân ở I, suy ra

$\widehat{AIC} = 180^\circ - 2\widehat{IAC}$

Vậy

$\widehat{BIC} = \widehat{BIA} + \widehat{AIC} = 360^\circ - 2(\widehat{BAI} + \widehat{IAC})$

$= 360^\circ - 2\widehat{BAC} = 360^\circ - 2.120^\circ = 120^\circ$.



Hình 93

5. a) Xét tam giác ANB và AMC có:

AB = AC (gt)

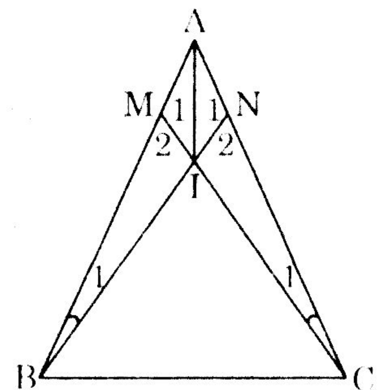
Chung góc A

AN = AM (gt)

Vậy $\Delta ANB = \Delta AMC$ (c.g.c). Suy ra

$\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$

$\widehat{M_1} = \widehat{N_1}$, do đó $\widehat{M_2} = \widehat{N_2}$



Hình 94

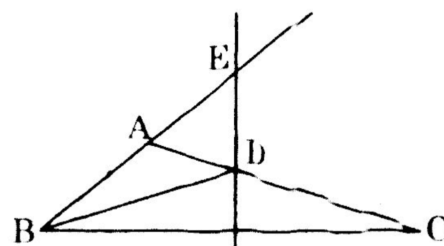
Lại có AB = AC và AM = AN nên MB = NC. Vì vậy $\Delta IMB = \Delta INC$ (g.c.g), suy ra IB = IC, do đó ΔBIC cân ở I;

b) Vì IB = IC nên điểm I thuộc đường trung trực của BC (1)

Mặt khác do AB = AC nên điểm A cũng thuộc đường trung trực của BC (2).

Từ (1) và (2) suy ra AI là trung trực của BC.

6. (h.95)



Hình 95

a) Vì $\hat{A} = 120^0$ nên $\hat{B} + \hat{C} = 180^0 - 120^0$;

$\hat{B} + \hat{C} = 60^0$; $\hat{B} - \hat{C} = 30^0$ (gt)

nên $2\hat{B} = 90^0$, $\hat{B} = 45^0$

Vậy $\hat{C} = 45^0 - 30^0 = 15^0$;

b) Điểm D nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BC, nên $\widehat{DBC} = \hat{C}$ và tia BD nằm giữa hai tia BC và tia BA. Cho nên

$\widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC} \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ABC} - \widehat{DBC}$, vậy $\widehat{ABD} = \hat{B} - \hat{C} = 45^0 - 15^0 = 30^0$.

Trong tam giác ABD có: $\hat{A} = 120^0$, $\widehat{ABD} = 30^0$ nên $\widehat{ADB} = 180^0 - (120^0 + 30^0) = 30^0$.

$\widehat{ABD} = \widehat{ADB} = 30^0$ (1)

E nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BC và nằm trên đường thẳng AB nên $\widehat{ECB} = \hat{B}$.

Tia CD nằm giữa hai tia CB và CE nên:

$\widehat{ECD} = \widehat{ECB} - \hat{C}$ hay $\widehat{ECD} = \hat{B} - \hat{C} = 30^0$ (2)

So sánh (1) và (2) ta có:

$\widehat{ABD} = \widehat{ADB} = \widehat{ECD} = 30^0$;

c) Hai tam giác EDB và EDC có:

DB = DC; EB = EC (E, D nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BC).

$\widehat{EBD} = \widehat{ECD} = 30^0$ (chứng minh ở câu b)).

Vậy $\Delta EDB = \Delta EDC$.

§9. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

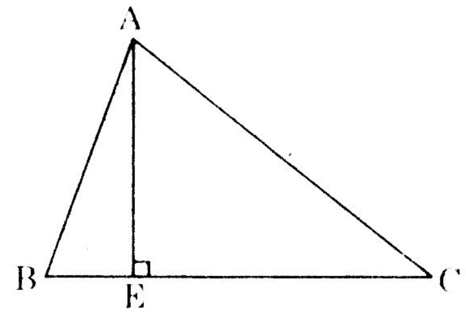
I – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đường cao của tam giác

• Trong một tam giác đoạn vuông góc hạ từ một đỉnh đến một đường thẳng chứa cạnh đối diện gọi là *đường cao* của tam giác đó.

Đoạn thẳng AE là đường cao của ΔABC (h.96). Có khi người ta gọi đường thẳng AE là đường cao của ΔABC.

• Trong một tam giác có 3 đường cao.



Hình 96

2. Tính chất ba đường cao của tam giác

Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm, điểm đó gọi là *trực tâm* của tam giác đó.

3. Đường cao, đường trung tuyến, trung trực, phân giác của tam giác cân

• Trong một tam giác cân đường trung trực ứng với cạnh đáy đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến là đường cao cùng xuất phát từ đỉnh đối diện với cạnh đáy.

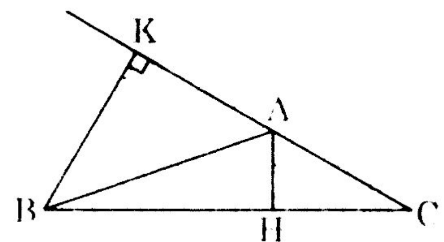
• Dễ dàng chứng minh được trong một tam giác nếu hai trong 4 loại đường: Trung tuyến, phân giác, đường cao, cùng xuất phát từ một đỉnh và đường trung trực ứng với cạnh đối diện với đỉnh này trùng nhau thì tam giác đó là một tam giác cân.

Ví dụ 1. Gọi AH và BK là các đường cao của tam giác **ABC**. **Chứng minh rằng** $\widehat{CBK} = \widehat{CAH}$.

Giải. Ta **nhận thấy** hai **góc CBK** và CAH đều là góc **nhọn** và có các cạnh tương ứng vuông **góc với nhau:**

CB ⊥ AH và **BK** ⊥ CA.

Vậy $\widehat{CBK} = \widehat{CAH}$.



Hình 97

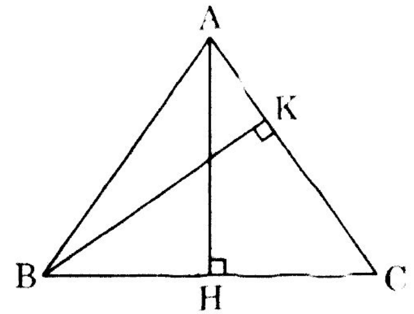
Ví dụ 2. Cho tam giác cân ABC (AB = AC): AH và BK là các đường cao. Chứng minh $\widehat{CBK} = \widehat{BAH}$.

Giải

Trong tam giác cân đã cho thì đường cao AH cũng là đường phân giác của góc A.

Do đó $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$.

Mặt khác $\widehat{CAH}$ và $\widehat{CBK}$ là hai góc nhọn và có các cạnh tương ứng vuông góc, nên $\widehat{CAH} = \widehat{CBK}$.



Hình 98

II. BÀI TẬP

1. Cho tam giác cân ABC (AB = AC) kẻ đường phân giác AD của $\widehat{A}$, kẻ đường cao BK ⊥ AC, chúng cắt nhau tại H. Trên cạnh AB lấy AI = AK.

a) Chứng minh AD, BK, CI cùng đi qua 1 điểm;

b) Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của AB, DK và CH. Chứng minh 3 điểm M, N, P thẳng hàng.

2. Cho tam giác vuông ABC ($\widehat{A} = 90^o$) có AB = 5cm, BC = 13cm. Trên tia BA lấy BD = BC = 13cm (A nằm giữa B và D). Tia phân giác của $\widehat{B}$ cắt AC ở E, DE cắt BC ở F.

a) Tính độ dài của DF;

b) Xác định trực tâm của các tam giác ABC và EBC.

3. Cho tam giác đều ABC. Các đường cao AH và BE cắt nhau tại G. Kéo dài AH để có HD = HG. Các điểm P và Q trên cạnh BC sao cho BP = PQ = QC.

Chứng minh các đường thẳng DP và DQ theo thứ tự vuông góc với BG và GC.

4. Hai đường cao AH và BK của tam giác nhọn ABC cắt nhau tại D.

a) Tính góc HDK khi $\widehat{C} = 50^o$;

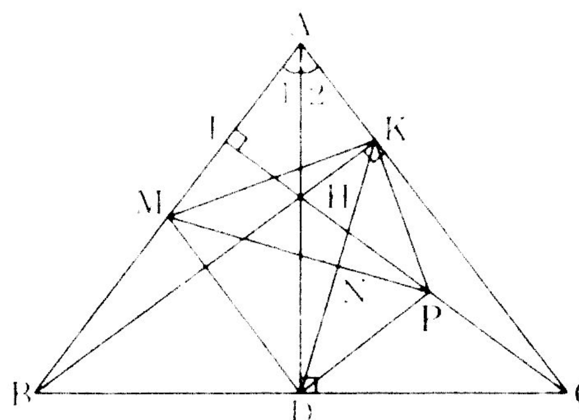
b) Chứng minh rằng nếu DA = DB thì tam giác ABC là tam giác cân.

5. Cho tam giác cân ABC (AB = AC). Gọi D là một điểm bất kì trên đáy BC. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ D tới các cạnh bên bằng đường cao ứng với cạnh bên.

6. Chứng minh rằng: Trong một tam giác tổng của ba đường cao nhỏ hơn chu vi của tam giác đó.

III. HƯỚNG DẪN GIẢI

1. a) ΔABC cân ($AB = AC$), phân giác AD của $\hat{A}$ đồng thời là đường cao. Xét ΔABK và ΔACI có $AB = AC$; $AK = AI$; chung góc BAC nên $\Delta ABK = \Delta ACI$ (c.g.c) suy ra $\widehat{AIC} = \widehat{AKB} = 90^0$ hay $CI \perp AB$.



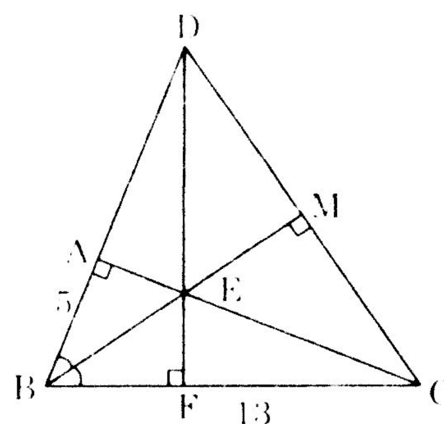
Hình 99

ΔABC có 3 đường cao AD; BK; CI cắt nhau tại 1 điểm, mà AD cắt BK tại H nên CI đi qua H;

b) Theo bài 2 [illegible] "Trung điểm cạnh huyền của tam giác vuông th cách đều 3 đỉnh của tam giác ấy (và chính là giao điểm 3 đường trung trực)". Áp dụng để giải bài toán này ta có: P là trung điểm của cạnh huyền HC của hai tam giác vuông KHC và DHC nên $PK = PD = HP = PC \Rightarrow$ P thuộc trung trực của DK (1). Tương tự ta có M là trung điểm của cạnh huyền AB của hai tam giác vuông KAB và DAB nên $MK = MD = MA = MB \Rightarrow$ M thuộc trung trực của KD (2). Theo giả thiết th $NK = ND$ nên N thuộc trung trực của KD (3). Từ (1), (2), (3) suy ra M, N, P cùng thuộc trung trực của đoạn thẳng DK. Vậy 3 điểm M, N, P thẳng hàng.

2. a) Tia BE cắt CD tại M.

ΔBCD cân ($BC = BD = 13$ cm), tia phân giác của $\hat{B}$ đồng thời là đường cao nên $BM \perp CD$, mà $CA \perp BD$ suy ra E là trực tâm của ΔBCD, do đó $DF \perp BC$.



Hình 100

• ΔABC và ΔFBD có $\hat{A} = \hat{F} = 90^0$; $BD = BC$; chung góc B. Vậy $\Delta ABC = \Delta FBD$ (cạnh huyền, góc nhọn), suy ra $DF = AC$ (1).

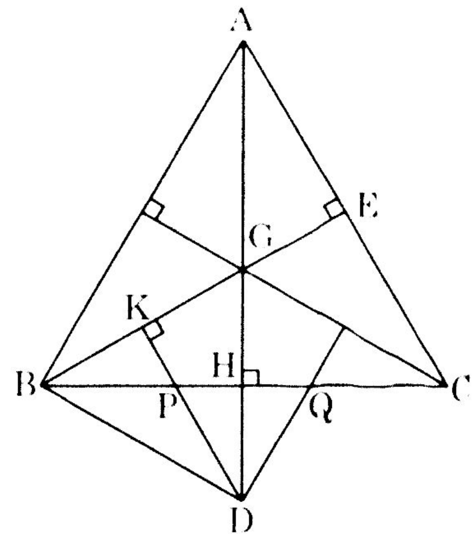
ΔABC vuông tại A, theo định lí Pitago ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$. Vậy $AC = 12$cm (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DF = 12$cm.

b) ΔABC có $BA \perp AC$ và $CA \perp AB$ nên A là trực tâm ΔABC. ΔEBC có $BA \perp EC$; $CM \perp EB$ nên D là trực tâm của ΔEBC.

3. • ΔABC đều nên các đường cao AH, BE đồng thời là trung tuyến và trực tâm G đồng thời là trọng tâm, suy ra $HB = HC$ và $GH = \frac{1}{2}AG = HD \Rightarrow$

$GD = GA = \frac{2}{3}AH$; $BD = \frac{2}{3}BE$.



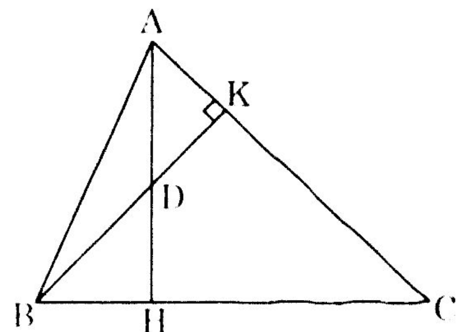
Hình 101

• ΔAHB và ΔAEB có chung cạnh AB, $\hat{E} = \hat{H} = 90^\circ$; $\widehat{BAE} = \widehat{ABH} = 60^\circ$, nên $\Delta AHB = \Delta AEB$ (cạnh huyền góc nhọn) do đó $AH = BE \Rightarrow$ $\frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}BE$ hay $DG = BG$ (1)

Mặt khác, do ΔBGD có đường cao BH đồng thời là trung tuyến nên ΔBGD cân đỉnh B $\Rightarrow BG = BD$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $BG = DG = BD$. Vậy ΔBGD đều.

• $BP = PQ = QC = \frac{1}{3}BC = \frac{2}{3}BH$ mà BH là trung tuyến của ΔBGD, nên P là trọng tâm ΔBGD, do đó DP cắt BG tại K thì DK là trung tuyến đồng thời là đường cao. Vậy $DK \perp BG$. Chứng minh tương tự ta cũng có $DQ \perp GC$.

4. (h.102) a) Vì hai góc $\hat{C}$ và $\widehat{ADK}$ đều nhọn và có các cạnh tương ứng vuông góc nên $\hat{C} = \widehat{ADK}$. Nhưng góc $\widehat{HDK}$ kề bù với góc $\widehat{ADK}$ nên hai góc $\hat{C}$ và $\widehat{HDK}$ là bù nhau. Như vậy $\widehat{HDK} = 180^\circ - \hat{C} = 130^\circ$;

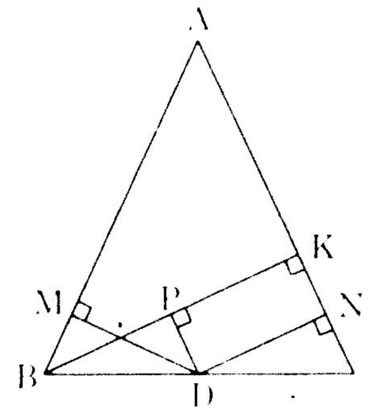


Hình 102

b) Nếu $DA = DB$ thì $\widehat{DAB} = \widehat{DBA}$, do đó hai tam giác vuông HAB và KBA bằng nhau vì có cạnh huyền bằng nhau và có một góc nhọn bằng nhau. Từ đó suy ra $\widehat{KAB} = \widehat{HBA}$, hai góc này cùng kề với đáy AB của tam giác ABC nên ta suy ra tam giác ABC cân, với $CA = CB$.

5. (h.103) Ta chứng minh rằng DM + DN = BK. Thực vậy, kẻ DP vuông góc với BK. Ta có DP // NK và PK // DN, nên DN = PK và $\widehat{MBD} = \widehat{PDB}$ (vì $\widehat{PDB} = \widehat{ACB}$). Do đó hai tam giác vuông MBD và PDB bằng nhau, vì có cạnh huyền bằng nhau và một góc nhọn bằng nhau, từ đó suy ra DM = BP.

Như vậy DM + DN = BP + PK = BK.



Hình 103

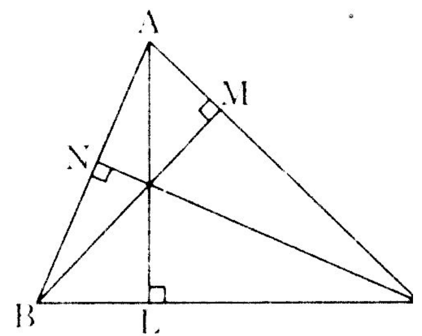
6. Giả sử ABC là tam giác đã cho; AL, BM và CN là các đường cao của tam giác đó. Ta chứng minh rằng:

AL + BM + CN < AB + BC + CA.

Thực vậy, AL < AB. Tương tự: BM < BC và CN < CA. Cộng từng vế của ba bất đẳng thức này ta được:

AL + BM + CN < AB + BC + CA.

Vậy tổng của ba đường cao nhỏ hơn chu vi tam giác.



Hình 104

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

1. Cho tam giác ABC, H là trực tâm của tam giác. Xác định trực tâm c các tam giác ABH, BCH, ACH.

2. Cho tam giác cân ABC, cạnh đáy là BC và góc BAC nhọn. D là trun điểm của cạnh BC, qua D và ở phía trong tam giác ABC dựng một đườn thẳng tạo với cạnh DC một góc bằng góc BAC, đường thẳng này c đường thẳng AB tại M và AC tại N. Chứng minh:

a) $DN = \frac{BC}{2}$;

b) Trong tam giác BDM, cạnh DM là cạnh lớn nhất.

3. Cho tam giác đều ABC, D là trung điểm của BC. Trên tia AB lấy điểm M sao cho B nằm giữa A và M, gọi N là giao điểm của MD và AC

a) So sánh hai đoạn thẳng DM và BD, DN và DC;

b) So sánh hai đoạn thẳng DM và DN.

4. Cho tam giác ABC, AB > AC, D là trung điểm cạnh BC. Trên cạnh AB lấy điểm E, trên cạnh AC lấy điểm F sao cho BE = CF. Chứng minh $\widehat{DEF} > \widehat{DFE}$.

5. Cho góc xOy bằng 60^o. Tia Om nằm giữa hai tia Ox, Oy và $\widehat{xOm} = 20^o$. Trên tia Ox lấy điểm H, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với Ox, nó cắt Om tại B và cắt Oy tại A. Trên tia Bm lấy điểm D sao cho BD = AD. Chứng minh OA = AD.

6. Cho tam giác ABC có $\hat{C} = 30^o$. Đường cao AH = $\frac{1}{2}$BC. Tìm các góc A và B.

7. Cho tam giác ABC (AB < AC). Trên các cạnh AB và AC theo thứ tự lấy hai điểm D và E sao cho BD = CE.

a) So sánh hai góc BDE và DEC;

b) Chứng minh DC > DE;

c) Gọi M và N là trung điểm của DE và BC. Kẻ MF // BD và MF = BD, kẻ MG // EC và MG = EC. Chứng minh ba điểm F, N, G thẳng hàng;

d) Chứng minh đường thẳng MN, song song với tia phân giác Ax của góc BAC.

8. Cho tam giác ABC. Điểm G thuộc miền trong của ΔABC.

a) Chứng minh GA + GB + GC > $\frac{1}{2}$ chu vi ΔABC;

b) Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của BC và AC. Nối GM và kéo dài để có MP = MG. Nối GN và kéo dài để có NQ = NG. Nối AP và BQ cắt nhau tại O. Chứng minh OA = OP và OB = OQ;

c) Chứng minh rằng khi G di động thì GO luôn luôn đi qua một điểm cố định.

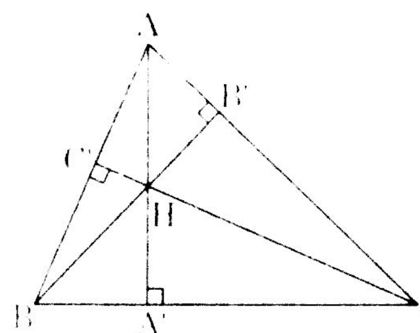
9. Cho tam giác đều ABC. Lấy trên các cạnh AB, BC, CA theo thứ tự lấy các điểm M, N, P sao cho AM = BN = CP = $\frac{1}{3}$ cạnh ΔABC.

a) Chứng minh ΔMNP là tam giác đều.

b) Chứng minh MN ⊥ BC.

c) Gọi H là trực tâm của ΔABC, chứng minh H cũng là trực tâm của ΔMNP.

II. HƯỚNG DẪN GIẢI

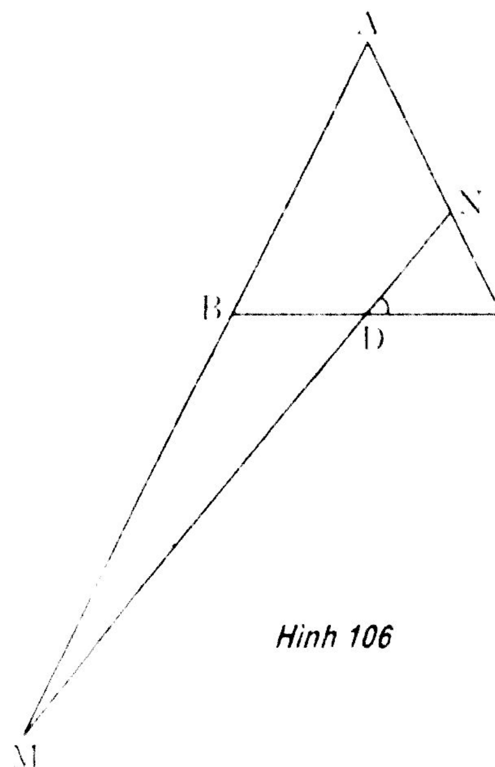


Hình 105

1. ΔABH: đường cao HC' (HC' ⊥ AB), đường cao AB' (AB' ⊥ BH), đường cao BA' (BA' ⊥ HA).

Ba đường cao HC', AB', BA' cắt nhau tại C. Vậy C là trực tâm của ΔABH.

Cũng chứng minh tương tự, trực tâm của ΔBCH, ΔACH lần lượt là A, B.



Hình 106

2. (h.106) a) ΔDNC có $\hat{N} = 180^0 - (\hat{D} + \hat{C})$ mà $\hat{D} = \hat{A}$, $\hat{C} = \hat{B}$ ⇒

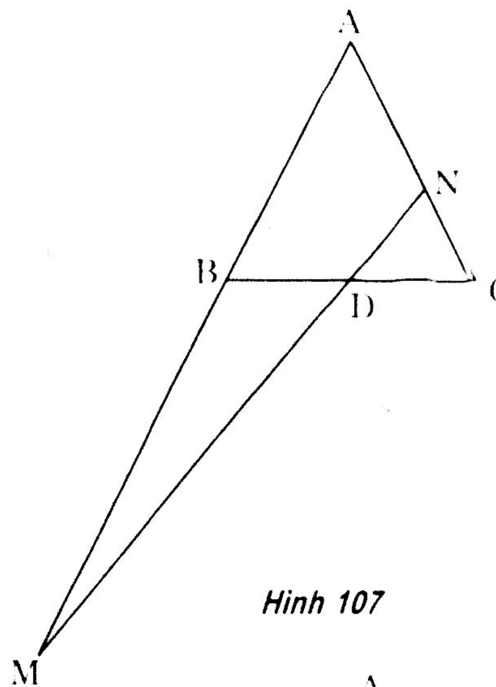
$\hat{N} = 180^0 - (\hat{A} + \hat{B})$ (1)

ΔABC: $\hat{C} = 180^0 - (\hat{A} + \hat{B})$ (2)

So sánh (1) và (2) suy ra $\hat{N} = \hat{C}$, vậy ΔDNC là tam giác cân, suy ra DN = DC, mà DC = $\frac{BC}{2}$ nên DN = $\frac{BC}{2}$;

b) ΔBDM có $\widehat{DBM}$ tù (vì $\hat{B}$ nhọn). Vậy DM là cạnh lớn nhất.

(h.107) ΔMBD có $\widehat{MBD} = 120^0$ (vì $\widehat{ABC} = 60^0$). Vậy $\widehat{MBD}$ là góc lớn nhất, suy ra DM > BD (1).



Hình 107

$\widehat{BMD} + \widehat{BDM} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BDM} < 60^0$, mà $\widehat{BDM} = \widehat{NDC}$ (đối đỉnh) suy ra $\widehat{NDC} < 60^0$ và $\widehat{DNC} > 60^0$

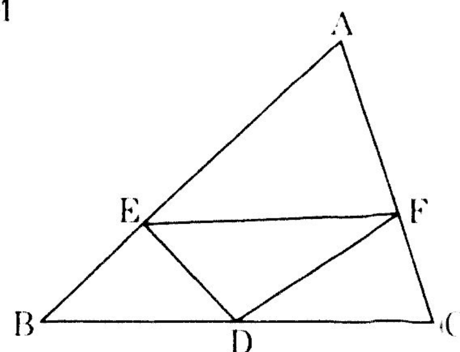
vì $\widehat{C} = 60^0 \Rightarrow \widehat{DNC} > \widehat{C}$ suy ra DC > DN mà BD = DC

$\Rightarrow$ BD > DN (2);

b) So sánh (1) và (2) suy ra DM > DN.

(h.108) Hai tam giác BED và FDC

có $\left.\begin{array}{l} BE = CF \\ BD = CD \end{array}\right\}$ (gt)

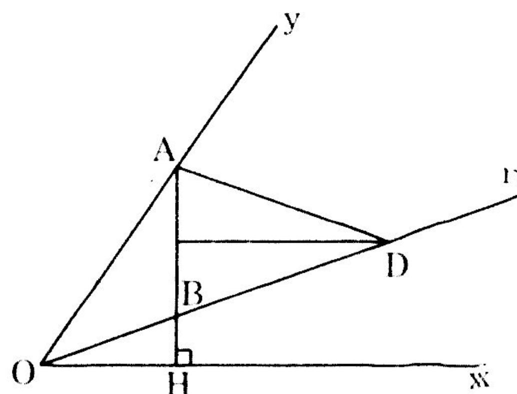


Hình 108

$\widehat{B} < \widehat{C}$ (vì trong tam giác ABC, AB > AC). Vậy DF > ED.

Trong tam giác DEF, DF > ED nên $\widehat{DEF} > \widehat{DFE}$

(h.109) Trong tam giác vuông BOH có $\widehat{BOH} = 20^0$, $\widehat{H} = 1v$ (giả thiết) suy ra $\widehat{OBH} = 70^0$.



Hình 109

$\widehat{OBH} = \widehat{ABD}$ (đối đỉnh).

Vậy $\widehat{ABD} = 70^0$.

ΔABD là tam giác cân (AD = BD giả thiết), suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{ABD} = 70^0$.

Vậy $\widehat{ADB} = 180^0 - 2.70^0 = 40^0$(1);

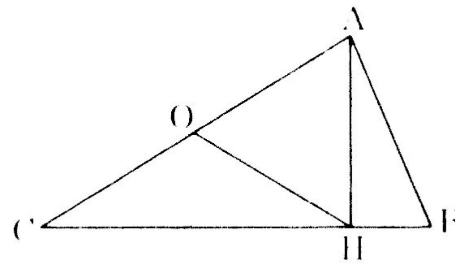
Ta có: $\widehat{AOB} = \widehat{xOy} - \widehat{xOm} = 60^0 - 20^0 = 40^0$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra ΔOAD cân tại A $\Rightarrow$ OA = AD.

(h.110) Gọi O là trung điểm của AC, HO là trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác AHC nên $HO = \frac{1}{2}AC = OA$. Vậy OAH là tam giác cân, ta lại có $\widehat{CAH} = 60^0$ (vì $\widehat{ACB} = 30^0$), cho nên ΔOAH là tam giác

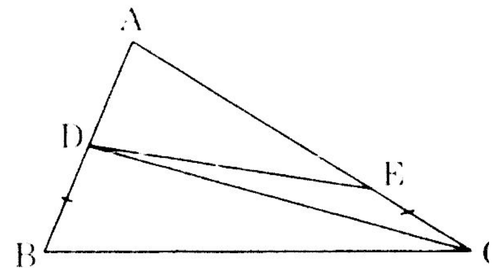
đều AH = OA hay AH = $\frac{1}{2}$AC, AH = $\frac{1}{2}$BC (giả thiết) suy ra AC = BC. Do đó tam giác ABC là tam giác cân đỉnh C.

Vậy $\hat{A} = \hat{B} = \frac{180^0 - 30^0}{2} = 75^0$.



Hình 110

7. a) theo giả thiết AB < AC hay AD + DB < AE + EC mà BD = EC nên AD < AE, suy ra $\widehat{AED} < \widehat{ADE}$ (1) (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác ADE).



Hình 111

Lại có $\widehat{BDE}$ kề bù $\widehat{ADE}$ và $\widehat{DEC}$ kề bù $\widehat{AED}$ nên $\widehat{BDE} + \widehat{ADE} = 180^0 = \widehat{DEC} + \widehat{AED}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BDE} < \widehat{DEC}$;

b) ΔADE có $\widehat{AED} < \widehat{ADE}$ nên $\widehat{AED}$ là góc nhọn (vì nếu là góc vuông hay tù thì $\widehat{ADE}$ tù dẫn đến tổng 3 góc của ΔADE lớn hơn 180^0). $\widehat{AED}$ kề bù $\widehat{DEC}$ nên $\widehat{DEC}$ là góc tù. ΔEDC có $\widehat{DEC}$ là góc tù nên là góc lớn nhất, suy ra cạnh DC lớn nhất. Vậy DC > DE;

c) Nối FD, BF. ΔMDF và ΔBFD có DF chung, MF = BD (giả thiết) $\widehat{MFD} = \widehat{FDB}$ (vì MF // BD và là 2 góc so le trong)

Vậy ΔMDF = ΔBFD (c.g.c). Suy ra: BF = MD (3) và $\widehat{MDF} = \widehat{DFB}$ mà góc so le trong nên BF // DM (4). Chứng minh tương tự ta cũng có CG = ME (5) và CG // ME (6). Theo giả thiết thì MD = ME (7)

Từ (3), (5), (7) suy ra BF = CG; từ (4) và (6) suy ra BF // CG. ΔBNF và ΔCNG có CG = BF; CN = NB (giả thiết); $\widehat{GCN} = \widehat{FBN}$ (vì CG // BF và 2 góc so le trong). Vậy ΔBNF = ΔCNG (c.g.c). Suy ra $\widehat{BNF} = \widehat{CNG}$ mà $\widehat{BNF} + \widehat{FNC} = 180^0$ nên $\widehat{CNG} + \widehat{FNC} = 180^0$ do đó $\widehat{GNF} = 180^0$ = góc bẹt. Vậy 3 điểm F, N, G thẳng hàng;

d) MF = BD = CE = MG (giả thiết) nên ΔMFG cân, NF = NG (do ΔBNF = ΔCNG), do đó MN là trung tuyến đồng thời là phân giác của góc $\widehat{FMG}$, suy ra $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$.

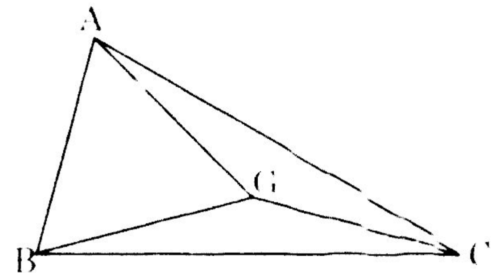
$\widehat{M_1} = \widehat{Q}$ (do MF // AB và 2 góc đồng vị); $\widehat{M_2} = \widehat{P_1}$ (do MG // AC và 2 góc so le ngoài). Từ các chứng minh trên suy ra $\widehat{Q} = \widehat{P_1}$. Vậy ΔAPQ cân, mà $\widehat{BAC}$ là góc ngoài nên $\widehat{BAC} = \widehat{P_1} + \widehat{Q} = 2\widehat{P_1}$ hay $2\widehat{A_2} = 2\widehat{P_1}$, suy ra $\widehat{A_2} = \widehat{P_1}$ mà 2 góc so le trong, vậy Ax // PQ hay Ax // MN.

8. a) ΔGAB có GA + GB > AB (quan hệ giữa 3 cạnh của 1 tam giác) (1). Tương tự ta cũng có GA + GC > AC (2) và GB + GC > BC (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra:

2(GA + GB + GC) > AB + AC + BC

Vậy: GA + GB + GC > $\frac{1}{2}$ chu vi ΔABC;

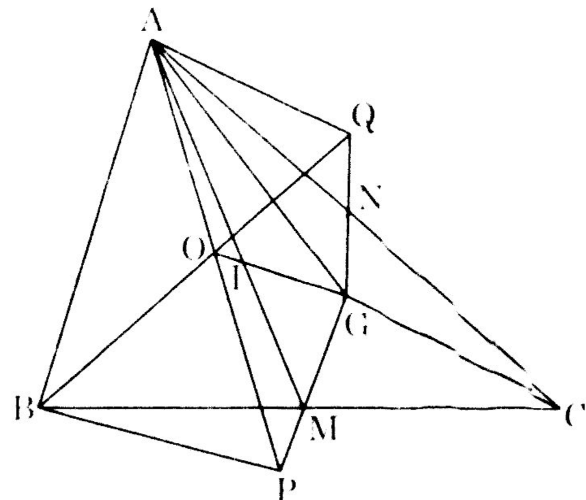


Hình 112

b) ΔANQ và ΔCNG có NA = NC (gt); NG = NQ (gt) = $\widehat{ANQ} = \widehat{CNG}$ (đối đỉnh) vậy ΔANQ = ΔCNG (c.g.c). Suy ra:

AQ = CG; $\widehat{AQN} = \widehat{NGC}$ mà 2 góc so le trong nên AQ // CG. Chứng minh tương tự ta cũng có BP = CG và BP // CG.

Suy ra BP = AQ (= CG) và BP // AQ (// CG).



Hình 113

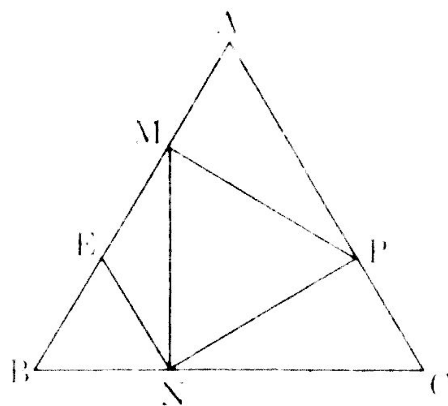
Δ AOQ và ΔBOP có AQ = BP; $\widehat{QAP} = \widehat{APB}$; $\widehat{AQB} = \widehat{QBP}$ (vì AQ // BP và là 2 góc so le trong). Vậy Δ AOQ = Δ BOP (g.c.g). Suy ra OA = OP và OB = OQ;

c) Δ GAP có hai trung tuyến GO và AM cắt nhau tại I nên I là trọng tâm, suy ra IA = $\frac{2}{3}$AM.

ΔABC có AM là trung tuyến, mà IA = $\frac{2}{3}$AM nên I là trọng tâm của ΔABC; lại có ΔABC cố định nên I cố định.

Vậy khi G di động thì GO luôn luôn đi qua điểm I cố định.

9. a) ΔABC đều (gt) nên $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^0$, AB = BC = CA mà AM = BN = CP = $\frac{1}{3}$ cạnh ΔABC, suy ra BM = CN = AP = $\frac{2}{3}$ cạnh ΔABC. Suy ra $\Delta AMP = \Delta BNM = \Delta CPN$ (c.g.c), do đó MP = MN = PN. Vậy ΔMNP là tam giác đều;



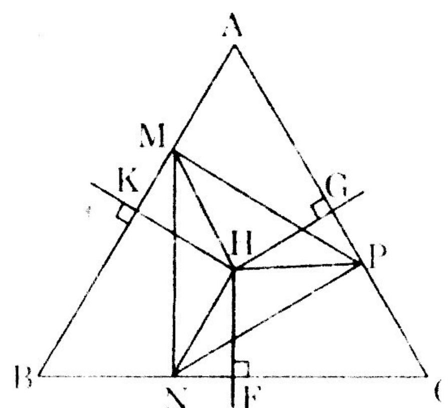
Hình 114

b) Gọi E là trung điểm của BM thì BE = EM = $\frac{1}{3}$AB = BN ⇒ ΔBEN cân có $\hat{B} = 60^0$. Vậy ΔBEN đều, nên $\widehat{BNE} = 60^0 = \widehat{BEN}$; NE = BE = EM, do đó ΔEMN cân có góc ngoài $\widehat{BEN} = \widehat{EMN} + \widehat{ENM} = 60^0$ ⇒ $2\widehat{ENM} = 60^0$. Vậy $\widehat{ENM} = 30^0$.

Từ các chứng minh trên suy ra $\widehat{BNM} = \widehat{BNE} + \widehat{ENM} = 60^0 + 30^0 = 90^0$. Vậy MN ⊥ BC.

Chứng minh tương tự ta có NP ⊥ AC và PM ⊥ AB;

c) Vì ΔABC đều nên trực tâm H đồng thời là giao điểm 3 đường trung trực của 3 cạnh, do đó K, F, G là trung điểm 3 cạnh và $\hat{K} = \hat{F} = \hat{G} = 90^0$; H cũng đồng thời là giao điểm 3 đường phân giác trong, do đó H cách đều 3 cạnh tức là HK = HG = HF. Lại có MK = AK − AM = $\frac{1}{2}AB - \frac{1}{3}AB = \frac{1}{6}AB$. Chứng minh tương tự ta có MK = GP = NF = $\frac{1}{6}$ cạnh ΔABC đều.



Hình 115

Từ các chứng minh trên suy ra $\Delta HKM = \Delta HGP = \Delta HFN$ (c.g.c), suy ra HM = HN = HP, do đó H là giao điểm 3 đường trung trực của 3 cạnh ΔMNP. Mặt khác ΔMNP đều nên H cũng là trực tâm của ΔMNP.

BÀI TẬP ÔN CUỐI NĂM

PHẦN SỐ HỌC – ĐẠI SỐ

1. Thực hiện phép tính: $\dfrac{1\frac{11}{31}.4\frac{3}{7} - \left(1,5 - 6\frac{1}{3}.\frac{2}{19}\right)}{4\frac{5}{6} + \frac{1}{9}\left(12 - 5\frac{1}{3}\right)}\left(-1 : \dfrac{14}{93}\right)$

(Trích đề thi HSGV lớp 7 thị xã Hà Đông, Hà Tây, 2002 – 2003)

2. a) Tính: $\dfrac{\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}}{\frac{5}{2003} + \frac{5}{2004} - \frac{5}{2005}} - \dfrac{\frac{2}{2002} + \frac{2}{2003} - \frac{2}{2004}}{\frac{3}{2002} + \frac{3}{2003} - \frac{3}{2004}}$

b) Biết $1^3 + 2^3 + ... + 10^3 = 3025$. Tính $2^3 + 4^3 + 6^3 + ... +$;

c) $A = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 0,25xy^2 - 4}{x^2 + y}$. Tính giá trị của A biết $x = -\frac{1}{2}$, y là số nguyên âm lớn nhất.

(Trích đề thi HSG lớp 7, TP. Hồ Chí Minh, 2003 – 2004)

3. Tìm x biết:

a) $x + \dfrac{1}{4} = -1$; b) $\dfrac{5}{6}x - \dfrac{3}{8}x - 10 = 12$;

c) $\left(|x| - \dfrac{1}{8}\right)\left(-\dfrac{1}{8}\right) = \left(-\dfrac{1}{8}\right)^7$; d) $x = \dfrac{a}{b + c} = \dfrac{b}{c + a} = \dfrac{c}{a + b}$.

(Trích đề thi giải Lương Thế Vinh Quận 9 TP. Hồ Chí Minh, 2002–2003)

4. Tìm x biết:

$$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 117$$

5. a) Cho $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, chứng minh rằng $\dfrac{ab}{cd} = \dfrac{(a + b)^2}{(c + d)^2}$;

b) Tìm số có 3 chữ số chia hết cho 18 và các chữ số tỉ lệ với 1; 2; 3.

6. a) Rút gọn biểu thức: $A = |x - 1| + |x - 2|$;

b) Tìm giá trị nguyên của y để biểu thức $B = \dfrac{42 - y}{y - 15}$ giá trị nguyên nhỏ nhất.

(Trích đề thi HSG lớp 7 thị xã Hà Đông, Hà Tây, (2002 2003)

. Hãy tính $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots - 1998^2 + 1999^2$.

. Tìm n nếu $(10^{12} + 25)^2 - (10^{12} - 25)^2 = 10^n$.

(Trích đề thi HSG ở Mĩ)

. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, phân số sau đây là tối giản $\dfrac{21n + 4}{14n + 3}$

(Trích đề thi Vô địch Toán quốc tế, 1959)

0. Cho hàm số xác định với mọi x thoả mãn:

$$x.f(x + 2) = (x^2 - 9).f(x)$$

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất ba nghiệm

(Trích đề thi vô địch Toán của Đức)

1. Hai số tự nhiên a và b nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng ước chung lớn nhất của $(a + b)$ và $(a^2 + b^2)$ bằng 1 hoặc bằng 2.

(Trích đề thi Vô địch Toán lớp 8 – Matscơva, 1963)

2. Cho các số nguyên dương $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{99}, a_{100}$. Giả sử rằng $a_1 > a_0$, $a_2 = 3a_1 - 2a_0$, $a_3 = 3a_2 - 2a_1, \ldots, a_{100} = 3a_{99} - 2a_{98}$. Chứng minh rằng $a_{100} > 2^{99}$.

(Trích đề thi vô địch Toán lớp 8 – Matscơva, 1962)

HẦN HÌNH HỌC

. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), trên nửa mặt phẳng không chứa điểm C bờ và đường thẳng AB dựng tam giác đều ABE và trên nửa mặt phẳng không chứa điểm B bờ là cạnh AC dựng tam giác đều ACD.

a) So sánh hai tam giác BCD và BCE;

b) Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Chứng minh các đoạn thẳng EC, D, AH đồng quy (đồng quy là cắt nhau tại 1 điểm).

. Cho tam giác ABC, ba góc đều nhọn, $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Tia phân giác của góc B cắt đường cao AH và cạnh AC tại O và M. Tại O kẻ đường thẳng song song với BC, nó cắt AB và AC tại D và E. Chứng minh:

a) Các tam giác BDO, MOE, AOM là tam giác cân;

b) Chứng minh M là trung điểm của AE.

. Cho tam giác MNP, góc nhọn M bằng hai lần góc P. Dựng đường cao NH. Trên tia đối của tia MN xác định điểm F sao cho MF = MH, nối F và H, nó cắt NP tại D.

a) Chứng minh các tam giác MEH, NHD, HDP là tam giác cân;

b) So sánh các góc của tam giác NED và các góc của tam giác NMP;
c) Trên đoạn thẳng MP lấy điểm M' sao cho HM = HM'. Chứng min NM' = MP suy ra NE = HP.

4. Cho tam giác ABC, $\hat{A} = 120^o$, $\hat{B} - \hat{C} = 30^o$. Đường trung trực của ca BC cắt cạnh AC tại D, cắt tia đối của tia AB tại E.
a) Tính các góc của tam giác ABC;
b) Chứng minh $\widehat{EBD} = \widehat{ECD} = 30^o$;
c) Chứng minh hai tam giác EDB và EDC bằng nhau.

5. Tính các góc của tam giác A , nếu các đường phân giác ngoài của g A và B bằng cạnh AB (đường phân giác ngoài AM của góc A của t giác ABC là đoạn thẳng mà điểm đầu là A và điểm cuối là giao điểm của tia phân giác và là đường thẳng chứa cạnh BC).

6. Cho tam giác vuông cân ABC (AB = AC), tia phân giác của các góc B C cắt AC và AB lần lượt tại E và D.
a) Chứng minh rằng BE = CD và AD = AE;
b) Gọi I là giao điểm của BE và CD, AI cắt BC tại M. Chứng minh rằ MAB, MAC là các tam giác cân;
c) Từ A và D vẽ các đường thẳng vuông góc với BE, các đường thẳ này cắt BC lần lượt tại K và H. Chứng minh rằng KH = KC.

(Trích đề thi HSG lớp 7, thị xã Hà Đông, Hà Tây, 2002 – 200

7. Cho tam giác nhọn ABC. Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam gi đều ABD và ACE. Gọi M là giao điểm của DC và BE. Chứng minh rằng
a) ΔABE = ΔADC;
b) $\widehat{BMC} = 120^o$.

(Trích đề thi HSG lớp 7, thành phố Hồ Chí Minh, 2003 – 200

8. Cho tam giác ABC vuông cân tại B, có trung tuyến BM. Gọi D là điể bất kì thuộc cạnh AC. Kẻ AH, CK vuông góc với BD (H, K thuộc BI Chứng minh
a) BH = CK;
b) Tam giác MHK vuông cân.

(Trích đề thi Toán 7 giải Lương Thế Vinh Quận 9, TP. Hồ Chí Min 2002 – 2003)

9. Cho tam giác đều ABC và điểm D trên cạnh BC. Đường thẳng đi qua và song song với AC cắt AB tại điểm E. Đường thẳng đi qua D và so song với AB cắt AC tại F. Gọi P là trung điểm của BF, Q là trung điể của CE. Chứng minh rằng tam giác PDQ là tam giác đều.

(Trích đề thi vào lớp 9 chuyên Toán TP. Hồ Chí Minh, 198

10. Từ trung điểm M cạnh đáy AC của tam giác cân ABC kẻ MH vuông góc với BC (H ∈ BC). Gọi P là trung điểm đoạn thẳng MH. Chứng minh rằng AH vuông góc với BP.

(Trích đề thi vô địch Toán lớp 10 Matxcơva, 1962)

HƯỚNG DẪN GIẢI

PHẦN SỐ HỌC – ĐẠI SỐ

1. $$\frac{\frac{42}{31}\cdot\frac{31}{7}-\left(\frac{3}{2}-\frac{19}{3}\cdot\frac{2}{19}\right)}{\frac{29}{6}+\frac{1}{6}\left(12-\frac{16}{3}\right)}\cdot\left(-1:\frac{14}{93}\right)$$

$$=\frac{6-\frac{5}{6}}{\frac{29}{6}+\frac{10}{9}}\cdot\left(-\frac{93}{14}\right)=\frac{\frac{31}{6}}{\frac{107}{18}}\cdot\left(-\frac{93}{14}\right)=\frac{93}{107}\cdot\left(-\frac{93}{14}\right)=-\frac{8649}{1498}.$$

2. a) $$\frac{\frac{1}{2003}+\frac{1}{2004}-\frac{1}{2005}}{\frac{5}{2003}+\frac{5}{2004}-\frac{5}{2005}}-\frac{\frac{2}{2002}+\frac{2}{2003}-\frac{2}{2004}}{\frac{3}{2002}+\frac{3}{2003}-\frac{3}{2004}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2003}+\frac{1}{2004}-\frac{1}{2005}}{5\left(\frac{1}{2003}+\frac{1}{2004}-\frac{1}{2005}\right)}-\frac{2\left(\frac{1}{2002}+\frac{1}{2003}-\frac{1}{2004}\right)}{3\left(\frac{1}{2002}+\frac{1}{2003}-\frac{1}{2004}\right)}=\frac{1}{5}-\frac{2}{3}=-\frac{7}{15};$$

b) $2^3+4^3+6^3+\ldots+20^3=2^3+2^3.2^3+2^3.3^3+\ldots+2^3.10^3$

$=2^3(1^3+2^3+3^3+\ldots+10^3)=8.3025=24200;$

c) $A=\dfrac{x^3-3x^2+0,25xy^2-4}{x^2+y}$. Tính giá trị của A với $x=-\dfrac{1}{2}$ và $y=-1$

(vì -1 là số nguyên âm lớn nhất)

Nên $$A=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right).(-1)^2-4}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(-1)}=\frac{-\frac{1}{8}-\frac{3}{4}-\frac{1}{8}-4}{-\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{-5}{-\frac{3}{4}}=\frac{20}{3}.$$

3. a) $x + \frac{1}{4} = -1$; b) $\frac{5}{6}x - \frac{3}{8}x - 10 = 12$

$x = -1 - \frac{1}{4}$ $\qquad \frac{5}{6}x - \frac{3}{8}x = 12 + 10$

$x = -1\frac{1}{4}$ $\qquad \frac{22}{48}x = 22$

$x = 22 : \frac{22}{48}$

$x = 48;$

c) $\left(|x| - \frac{1}{8}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^5 = \left(-\frac{1}{8}\right)^7$

$|x| - \frac{1}{8} = \left(-\frac{1}{8}\right)^7 : \left(-\frac{1}{8}\right)^5$

$|x| - \frac{1}{8} = \left(-\frac{1}{8}\right)^2$

$|x| = \left(-\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{8}$

$|x| = \frac{9}{64}$

$x = \pm\frac{9}{64};$

d) $x = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$ nên $x = \frac{a+b+c}{b+c+c+a+a+b} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$

(với $a + b + c \neq 0$)

4. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 117$ nên $3^x(1 + 3 + 9) = 117$

$3^x.13 = 117$ suy ra $3^x = 117 : 13$

$3^x = 9$

$3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2.$

5. a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k$ nên $\frac{a}{c}.\frac{b}{d} = \frac{ab}{cd} = k^2$ (1)

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{c+d} = k$ nên $\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} = \left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 = k^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$;

b) Gọi a, b, c là ba chữ số tạo nên số phải tìm có ba chữ số (a, b, c có thể là một trong (0, 1, 2, 3,... với chú ý chữ số hàng trăm khác 0). Số phải tìm chia hết cho 18 nên chia hết cho 9 và 2. Vậy $a + b + c \vdots 9$ và chữ số hàng đơn vị phải là số chia hết cho 2. Theo đề bài và không làm mất tính chất tổng quát, ta có thể viết:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{1+2+3} = \frac{a+b+c}{6}$$

$a + b + c \vdots 9$ nên $a + b + c = 9; 18; 27$

- Với $a + b + c = 18 \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{18}{6} = 3 \Rightarrow a = 3, b = 6, c = 9.$

Vậy có các số sau thoả mãn đề bài 396, 936

- Với $a + b + c = 9$ thì $\frac{a+b+c}{6} = \frac{9}{6} \Rightarrow a = \frac{9}{6}$ (bị loại)
- Với $a + b + c = 27$ thì $a = b = c = 9$ (bị loại) vì 999 không chia hết cho 2 nên không chia hết cho 18 (chỉ chia hết cho 9)

6. a) $A = |x - 1| + |x - 2|$. Ta có thể lập bảng sau:

x		1		2	
$\lvert x-1\rvert$	$1 - x$		$x - 1$		$x - 1$
$\lvert x-2\rvert$	$2 - x$		$2 - x$		$x - 2$
A	$3 - 2x$		1		$2x - 3$

Từ bảng trên ta có:

- Với $x < 1$ thì $A = 3 - 2x$
- Với $1 \leq x < 2$ thì $A = 1$
- Với $x \geq 2$ thì $A = 2x - 3$;

b) $B = \frac{42 - y}{y - 15} = -1 + \frac{27}{y - 15}$

Muốn B có giá trị nguyên nhỏ nhất thì $\frac{27}{y - 15}$ có giá trị nguyên nhỏ nhất nên $y - 15$ là ước âm của 27 lớn nhất. Ta biết ước âm lớn nhất của 27 là -3 nên $y - 15 = -3 \Rightarrow y = 12$. Do đó với $y = 12$ thì $B = -1 + \frac{27}{12 - 15} = -10$ (-10 là giá trị nguyên nhỏ nhất của B)

7. Gọi tổng phải tìm là A, vậy ta có:

$A = 1999^2 - 1998^2 + 1997^2 - 1996^2 + ... + 3^2 - 2^2 + 1$

$= (1999 + 1998)(1999 - 1998) + (1997 + 1996)(1997 - 1996) + ...$
$+ (3 + 2)(3 - 2) + 1$

$= 1999 + 1998 + 1997 + 1996 + 3 + 2 + 1$

$= \dfrac{1999.2000}{2} = 1999000.$

8. $(10^{12} + 25)^2 - (10^{12} - 25)^2 = \left[(10^{12} + 25) - (10^{12} - 25)\right]\left[(10^{12} + 25) - 10^{2} + 25\right]$

$= 2.10^{12}.50 = 10^{14}$

Vậy $10^n = 10^{14} \Rightarrow n = 14$.

9. Để chứng minh phân số $\dfrac{21n + 4}{14n + 3}$ là tối giản với mọi số tự nhiên n ta chứng minh

$(21n + 4)$ và $(14n + 3)$ là nguyên tố cùng nhau.

Gọi d ($d \geq 1$) là ước chung lớn nhất của hai số trên, ta có: $21n + 4 = md$, $14n + 3 = hd$ (m, h là số nguyên dương) suy ra $7n + 1 = (m - h)d \Rightarrow$ $21n + 3 = 3(m - h)$

Cho nên ta có: $1 = (21n + 4) - (21n + 3) = md - 3(m - h)d$

$= 3hd - 2md$

$= (3h - 2m)d$

Như vậy 1 là tích của hai số nguyên $3h - 2m$ và d. Điều này chỉ xảy ra khi $3h - 2m = d = 1$ (đpcm).

10. Cho x ba giá trị 0, 3, −3. Từ đẳng thức đã cho ta có

- Với $x = 0 \Rightarrow 0.f(2) = -9.f(0) \Rightarrow f(0) = 0$. Vậy $x = 0$ là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.
- Với $x = 3 \Rightarrow f(5) = 0$ nên $x = 5$ là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$
- Với $x = -3 \Rightarrow f(-1) = 0$ nên $x = -1$ cũng là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

11. Nếu $(a^2 + b^2)$ và $(a + b)$ chia hết cho d thì $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ cũng chia hết cho d $\Rightarrow 2ab$ chia hết cho d

Vậy $2a^2 = 2a(a + b) - 2ab$ và $2b^2 = 2b(a + b) - 2ab$ cũng chia hết cho d.

Nhưng a, b nguyên tố cùng nhau thì a^2, b^2 cũng nguyên tố cùng nhau.

Như vậy $2a^2$ và $2b^2$ không thể chia hết cho $d > 2$ suy ra (đpcm).

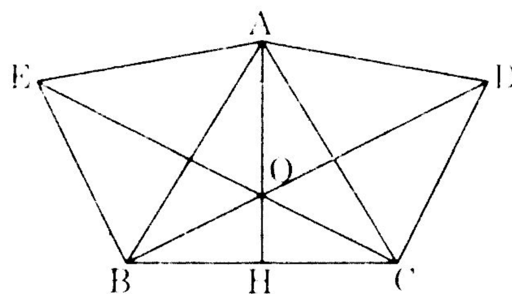
12. Ta có

$$a_1 - a_0 \geq 1$$
$$a_2 - a_1 = 2(a_1 - a_0)$$
$$a_3 - a_2 = 2(a_2 - a_1)$$
$$a_{100} - a_{99} = 2(a_{99} - a_{98})$$

$$a_{100} - a_{99} = 2^{99} \Rightarrow a_{100} = 2^{99} + a_{99} > 2^{99}$$

PHẦN HÌNH HỌC

1. a) Xét hai tam giác BCD và CBE, chúng có: BC chung, CD = BE (CD = AC, BE = AB, AB = AC). Tia BA nằm giữa hai tia BC và BE nên $\widehat{EBC} = \widehat{EBA} + \widehat{ABC} = 60^0 + \hat{B}$ (1). Tia CA nằm giữa hai tia CB và CD nên $\widehat{BCD} = 60^0 + \hat{C}$ (2) mà $\hat{B} = \hat{C}$ $\Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{EBC}$ nên $\Delta BCD = \Delta CBE$ (c.g.c), suy ra $\widehat{BCE} = \widehat{DBC}$.



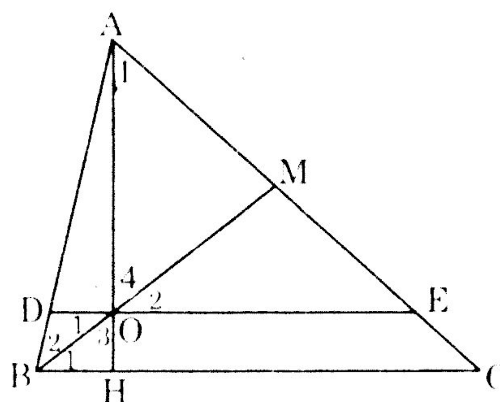
Hình 116

b) B và D nằm trên hai mặt phẳng đối bờ là đường thẳng AC nên đoạn BD cắt cạnh AC. Trong tam giác AEC, BD cắt cạnh AC, nó không thể cắt cạnh AE vì hai đoạn thẳng BD và AE nằm trên hai nửa mặt phẳng đối, bờ là đường thẳng AB, vậy đoạn thẳng BD cắt đoạn thẳng EC. Giả sử giao điểm là O.

ΔOBC là tam giác cân ($\widehat{BCE} = \widehat{DBC}$) nên OB = OC, $\Rightarrow$ O nằm trên đường cao AH (vì AH là đường trung trực của BC). Do đó ba đoạn thẳng BD, CE, AH cắt nhau tại O.

2. (h.117) a) $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (gt), $\hat{O}_1 = \hat{B}_1$ (so le trong) $\Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{O}_1$ nên ΔBOD là tam giác cân; $\hat{E} = \hat{C}$ (đồng vị), $\hat{O}_2 = \hat{O}_1 = \hat{B}_1$ mà $\hat{B}_1 = \hat{C}$ ($\hat{B} = 2\hat{C}$) suy ra $\hat{O}_2 = \hat{E}$.

Vậy ΔMOE cân;



Hình 117

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4 \text{ đối đỉnh} \\ \widehat{O}_4 + \widehat{B}_1 = 1v \\ \widehat{A}_1 + \widehat{C} = 1v \\ \widehat{C} = \widehat{B}_1\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{O}_4 \Rightarrow MA = MO\ (1)$$

$\Rightarrow$ AOM là tam giác cân;

b) ΔMOE cân $\Rightarrow$ MO = ME (2), so sánh (1) và (2) suy ra MA = ME, M nằm giữa hai điểm A và E, vậy M là trung điểm A và E.

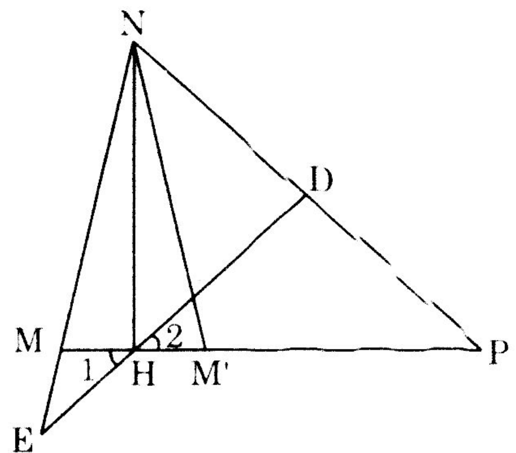
3. a) ΔMEH (ME = MH) $\Rightarrow$ ΔMEH là tam giác cân.

$\widehat{M} = \widehat{E} + \widehat{H}_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{M} = 2\widehat{E} = 2\widehat{H}_1$;

ΔDHP: $\widehat{H}_2 = \widehat{H}_1 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{M} = 2\widehat{H}_2 \\ \widehat{M} = 2\widehat{P}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{H}_2 = \widehat{P}$$



Hình 118

$\Rightarrow$ ΔDHP là tam giác cân;

ΔNHD có $\widehat{N} = \widehat{NHD}$

$(\widehat{N} + \widehat{P} = 1v,\ \widehat{NHD} + \widehat{H}_2 = 1v)$

nên ΔNHD là tam giác cân;

b) ΔNED và ΔNMP có: $\widehat{N}$ chung, $\widehat{E} = \widehat{P} \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{M}$;

c) HM = HM' nên ΔNMM' là tam giác cân.

$\widehat{M} = \widehat{M'}$ mà $\widehat{M} = 2\widehat{P} \Rightarrow \widehat{M'} = 2\widehat{P}$, $\widehat{M'}$ là góc ngoài ở đỉnh M' của ΔM'NP, $\widehat{M'} = \widehat{P} + \widehat{N} = 2\widehat{P} \Rightarrow \widehat{N} = \widehat{P}$ $\Rightarrow$ ΔM'NP là tam giác cân, vậy M'N = M'P.

M' là điểm nằm giữa hai điểm H, P, vậy HM' + M'P = HP (1). M nằm giữa hai điểm E và N nên

NM + ME = NE (2) mà HM = HM',

ME = HM $\Rightarrow$ HM' = ME;

NM = NM' = M'P.

So sánh (1) và (2) ta có HP = NE.

4. (h.119) a) $\hat{A} = 120^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Vậy

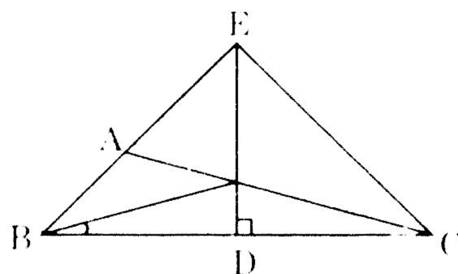
$\hat{B} + \hat{C} = 60^\circ$

$\hat{B} - \hat{C} = 30^\circ$ (gt)

$2\hat{B} = 90^\circ$

$\Rightarrow \hat{B} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

$\hat{C} = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$;



Hình 119

b) D nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BC

nên $\hat{B}_1 = \hat{C} \Rightarrow \widehat{EBD} = \hat{B} - \hat{B}_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{EBD} = \hat{B} - \hat{C} = 30^\circ$ (1)

$\hat{E} = 90^\circ - 45^\circ \Rightarrow \hat{E} = 45^\circ$.

E nằm trên đường trung trực của đoạn BC nên $\hat{B} = \widehat{BCE}$ mà $\hat{B} > \hat{C}$ nên $\widehat{BCE} > \hat{C}$, vậy tia AC nằm giữa hai tia CB và CE $\Rightarrow$ $\widehat{BCD} + \widehat{DCE} = \widehat{BCE} \Rightarrow \widehat{ECD} = \widehat{BCE} - \widehat{BCD} = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$ (2).

So sánh (1) và (2) ta có $\widehat{EBD} = \widehat{ECD} = 30^\circ$;

c) Hai tam giác EBD và ECD có: $\widehat{BED} = \widehat{DEC}$, EB = EC; ED chung, vậy $\Delta EBD = \Delta ECD$ (c.g.c).

5. Gọi AM và BN là các đường phân giác ngoài.

Trường hợp1 (h.120): Hai điểm M và N cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB.

Đặt $\widehat{BAC} = \varphi$ (đọc là phi), ta có $\widehat{ANB} = \varphi$ (vì ΔABN cân, AB = BN (theo giả thiết)).

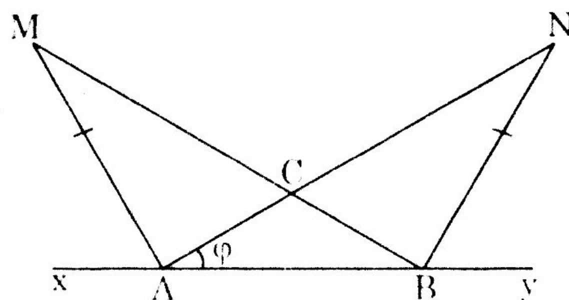
$\widehat{NBy} = \widehat{BAC} + \widehat{ANB} = 2\varphi \Rightarrow$

$\widehat{CBy} = 4\varphi$.

$\widehat{BMA} = \widehat{MBA} = 180^\circ - 4\varphi$

$\widehat{MAx} = 2(180^\circ - 4\varphi) \Rightarrow \widehat{xAC}$

$= 4(180^\circ - 4\varphi)$



Hình 120

mà $\widehat{xAy} = 180^\circ$ nên $\varphi + 4(180^\circ - 4\varphi) = 180^\circ$, $15\varphi = 720^\circ - 180^\circ = 540^\circ$, $\varphi = 540^\circ : 15 = 36^\circ$.

Vậy $\widehat{CAB} = 36^\circ$, $\widehat{CBA} = 180^\circ - 4.36^\circ = 36^\circ$, nên $\widehat{ACB} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

Trường hợp 2: Hai điểm M và N nằm trên hai nửa mặt phẳng đối, bờ là đường thẳng AB (H.121).

Đặt $\widehat{CAB} = \varphi$, $\widehat{BAN} = \widehat{BNA} = 180^\circ - \varphi$, $\widehat{NBP} = \widehat{ABN} = 2\varphi - 180^\circ$;

$$\widehat{AMC} + \widehat{CBA} = \widehat{MAx} = \frac{180^\circ - \varphi}{2},$$

Hình 121

Hình 122

nên $\widehat{AMB} = \widehat{CBA} = \dfrac{180^\circ - \varphi}{4}$,

$\widehat{CBP} = 180^\circ$ nên $\dfrac{180^\circ - \varphi}{4} + 2(2\varphi - 180^\circ) = 180^\circ$

$\Leftrightarrow 15\varphi = 1980^\circ \Rightarrow \varphi = \dfrac{1980^\circ}{15} = 132^\circ$ nên $\widehat{CAB} = 132^\circ$,

$\widehat{CBA} = \dfrac{180^\circ - 132^\circ}{4} = 12^\circ$, $\widehat{BCA} = 180^\circ - (132^\circ + 12^\circ) = 36^\circ$.

6. a) Xét hai tam giác vuông ABE và ACD chúng có AB = AC, $\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$ (do ABC là tam giác vuông cân BE và CD là hai đường phân giác (gt)) $\Rightarrow \Delta ABE = \Delta ACD$ (hai tam giác cùng có một cạnh góc vuông và một góc nhọn bằng nhau). Suy ra BE = CD và AE = AD;

b) I là giao điểm của hai đường phân giác BE và CD $\Rightarrow$ AM là đường phân giác của $\hat{A}$ cũng là đường trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác vuông cân ABC $\Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC$ hay AM = MB = MC $\Rightarrow \Delta MAB$, ΔMAC cân;

c) Gọi N là giao của AK và CD. Dễ dàng chứng minh được $\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow AN = CN = ND$, nên N là trung điểm của CD, ta lại có DH // NK (do DH và AK cùng vuông góc với BE) ⇒ K là trung điểm CH hay KH = KC.

7. a) Xét hai tam giác ABE và ADC chúng có:

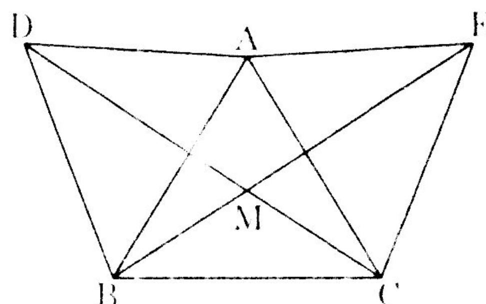
$\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$ (vì cùng bằng $\hat{A} + 60^0$)

AB = AD (hai cạnh của tam giác đều ABD)

AE = AC (hai cạnh của Δ ACE đều)

⇒ ΔABE = ΔADC (c.g.c)

⇒ BE = DC và $\widehat{AEB} = \widehat{ACD}$



Hình 123

b) Xét Δ CME + $\begin{cases} \widehat{MEC} = 60^0 - \widehat{AEB} \\ \widehat{MCE} = 60^0 + \widehat{ACD} \end{cases}$

$\widehat{MEC} + \widehat{MCE} = 120^0 \Rightarrow \widehat{CME} = 60^0$

Vậy $\widehat{BMC} = 180^0 - \widehat{CME} = 180^0 - 60^0 = 120^0$.

8. a) Xét hai tam giác vuông ABH và BCK, chúng có:

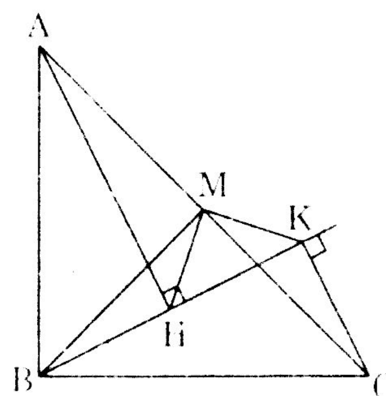
AB = BC (gt ΔABC vuông cân tại B)

$\widehat{BAH} = \widehat{KBC}$ (hai góc cùng phụ với một góc).

Suy ra ΔABH = ΔBCK

(hai tam giác vuông có cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác bằng nhau)

⇒ BH = CK;



Hình 124

b) Xét hai tam giác AMH và BMK chúng có AH = BK (cm trên) AM = BM (gt), $\widehat{MAH} = \widehat{MBK}$ (c.g.c), suy ra MH = MK (1) và $\widehat{AMH} = \widehat{BKM}$

Ta lại có $\widehat{AHM} + \widehat{MHK} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BKM} + \widehat{MHK} = 90^0$

Vậy $\widehat{HMK} = 90^0$ (2). Từ (1) và (2) suy ra (đpcm).

9. Dễ dàng chứng minh được

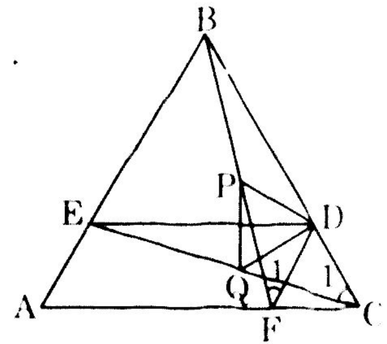
$\Delta BDF = \Delta EDC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{F_1} = \widehat{C_1}$,

BF = CE.

Xét 2 tam giác DFP và DCQ chúng có:

$\widehat{F_1} = \widehat{C_1}$



Hình 125

DF = DC (Δ DFC là tam giác đều $\widehat{D} = \widehat{F} = \widehat{C}$; FP = CQ ($FP = \frac{1}{2}BF$,

$CQ = \frac{1}{2}CE$ mà BF = CE (CM trên)) suy ra $\Delta DFP = \Delta DCQ \Rightarrow DP = DQ$ (1)

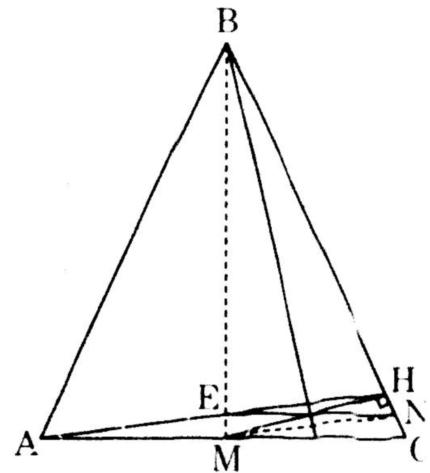
Dễ dàng chứng minh được $\Delta BPD = \Delta EQD$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{BDP} = \widehat{EDQ}$.

Ta lại có $\widehat{BDP} + \widehat{PDE} = 60^o$ (do Δ BDE là tam giác đều vì có $\widehat{B} = \widehat{E} = \widehat{D} = 60^o$).

Suy ra $\widehat{EDQ} + \widehat{PDE} = 60^o = \widehat{PDQ}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra (đpcm).

10. Gọi N là trung điểm của HC. Từ N kẻ NE // MC $\Rightarrow$ NE đi qua P trung điểm của MH đi qua P trung điểm của MH (định lí) $\Rightarrow NE \perp BM$ ($E \in BM$). Trong tam giác BMN, P là trực tâm $\Rightarrow BP \perp MN$ mà MN là đường trung bình của Δ AHC $\Rightarrow$ AH // MN $\Rightarrow AH \perp BP$.



Hình 126

MỤC LỤC

Trang

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương III

THỐNG KÊ

Chương IV

BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

PHẦN HÌNH HỌC

Chương III

QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC
CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY CỦA TAM GIÁC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9718312; (04) 9724770. Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@vnu.edu.vn

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Biên tập: NGUYỄN VĂN ĐẮC
PHƯƠNG THẢO

Trình bày bìa: VÕ THỊ THỪA

ĐỂ HỌC TỐT TOÁN THCS 7 – TẬP 2

In 3.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Xưởng in Chi nhánh Công ti Phát triển Công nghệ và Truyền hình - TP. Hồ Chí Minh.

Số xuất bản: 639 - 2006/CXB/ 15 – 120/ĐHQGHN, ngày 17/08/2006.

Quyết định xuất bản số: 292 LK/XB.

In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2006.